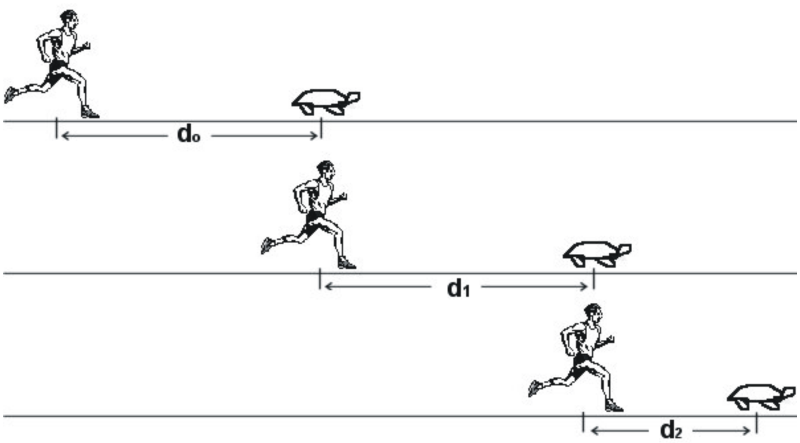
Ιστορική ανασκόπηση της Θεωρίας Συνόλων

Από πολύ παλιά, οι μαθηματικοί εξέταζαν τα σύνολα αντικειμένων κάποιου είδους και οι στοιχειώδεις έννοιες της σύγχρονης θεωρίας συνόλων υπονοούνται σε πολλά κλασσικά κείμενα. Ο πρώτος που εντόπισε τη δυσκολία να δοθεί ο ορισμός του συνόλου, χωρίς μάλιστα να το γνωρίζει, ήταν ο Έλληνας φιλόσοφος Επιμενίδης το 6ο αιώνα π.χ.. Αυτός είπε ότι << όλοι οι κρητικοί είναι ψεύτες >>, αλλά δεδομένου ότι και αυτός ήταν κρητικός, συμπεραίνουμε ότι αν έλεγε την αλήθεια ήταν ψεύτης και αντίστροφα. Το ίδιο πρόβλημα πραγματεύτηκε και ο φιλόσοφος Ευβουλίδης τον 4ο αιώνα π.χ. ίσως φανεί ότι τα προβλήματα αυτά δεν είναι πάρα πολύ σοβαρά, όμως όταν τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ορίσουν τα σύνολα προσέκρουσαν σ' αυτό ακριβώς το πρόβλημα.

Η έννοια του απείρου εμφανίζεται στην αρχαία Ελλάδα και αποτελούσε πηγή έμπνευσης για τα παράδοξα του Ζήνωνα (490 - 430 π.Χ.). Το πιο γνωστό από αυτά είναι του Αχιλλέα και της χελώνας. Σύμφωνα με αυτό << ο Αχιλλέας δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μια χελώνα που προπορεύεται εμπρός του>>. Έστω ότι η αρχική απόσταση του Αχιλλέα από τη χελώνα είναι d_0. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε η χελώνα, η χελώνα θα έχει προχωρήσει λίγο και θα έχει διανύσει απόσταση d_1. Διανύοντας ο Αχιλλέας την απόσταση d_1, η χελώνα θα έχει διανύσει την απόσταση d_2. Αυτό το σκεπτικό μπορεί να συνεχιστεί συνέχεια. Οπότε ο Αχιλλέας δε θα πιάσει τη χελώνα ποτέ.



Η απάντηση στο παράδοξο αυτό είναι ότι ο Αχιλλέας θα πιάσει τη χελώνα μετά από απόσταση d, όπου d είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς d_0, d_0+d_1, d_0+d_1+d_2,…

Ο G. Cantor (1845-1918) γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας από γονείς που είχαν μεταναστεύσει από τη Δανία. Σε ηλικία 11 ετών βρέθηκε μαζί με τους γονείς του στη Φρανκφούρτη και πάλι ως μετανάστης όπου πέρασε και το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. Από το 1874 με μια σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της θεωρίας συνόλων.

Σύμφωνα με τον G. Cantor ως σύνολο θα εννοούμε << μια συλλογή αντικειμένων διακεκριμένων και πλήρως καθορισμένων που λαμβάνονται από τον κόσμο είτε της εμπειρίας μας είτε της σκέψης μας >>. Τα αντικείμενα ενός συνόλου τα ονόμασε it στοιχεία του συνόλου και θεώρησε ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επίσης, έδωσε τον ορισμό του κενού συνόλου, το οποίο συμβόλισε φ , ως ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

Ο G. Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων και ότι το ανοικτό διάστημα (0,1) δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην Ιστορία των μαθηματικών ως η διαγώνιος μέθοδος του Cantor.

Ο G. Cantor παρατήρησε ότι όλα τα απειροσύνολα δεν είναι ίδια και τελικά βασιζόμενος στην παρατήρηση αυτή έκτισε μια ολόκληρη υπερπεπερασμένη αριθμητική. Η θεωρία συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε αρχικά με δυσπιστία από την πλειονότητα των μαθηματικών της εποχής εκείνης για την ισχύ και το βάρος των αποτελεσμάτων της. Αξίζει να σημειωθεί η διαμάχη του Γερμανού μαθηματικού Kronecker (1823-1891) με τον G. Cantor που απέτρεψε τον διορισμό του Cantor από το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Στη δεκαετία του 1890 - 1900 απέκτησε ένθερμους υποστηρικτές και η θεωρία του άρχισε να βρίσκει εφαρμογή στην Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Ο Hilbert υποστήριξε ότι << κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας >>. Δυστυχώς όμως το τέλος της ζωής του Cantor δεν ήταν καλό αφού πέθανε το 1918 σ'ένα ψυχιατρείο στα Halle.

Ο R. Dedekind (1831-1916) ήταν φίλος του Cantor και μελέτησε και αυτός τα απειροσύνολα. Αναρωτήθηκε για τη διαφορά που έχει ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος με το σύνολο των ρητών αριθμών και προσπάθησε να δώσει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Ασχολήθηκε με τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών και το 1888 επέλεξε πέντε αξιώματα για τη θεμελίωση αυτή. Τα αξιώματα αυτά τα οποία αργότερα ο G. Peano (1858-1932) τα εξέφρασε σε συμβολική γλώσσα και έγιναν γνωστά ως << Αξιώματα του Peano>>. Τα αξιώματα αυτά είναι:

A1: Υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, το μηδέν 0.

A2: Κάθε φυσικός αριθμός n έχει ένα επόμενο φυσικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με n+1.

A3: Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να έχει επόμενο το 0.

A4: Δεν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί που να έχουν τον ίδιο επόμενο.

A5: Αν ένα σύνολο αριθμών S περιέχει το 0 καθώς και τον επόμενο κάθε αριθμού που ανήκει στο S, τότε το σύνολο S συμπίπτει με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το Αξίωμα A5 είναι γνωστό ως το αξίωμα της it μαθηματικής επαγωγής.

Ο R. Dedekind ασχολήθηκε επίσης με τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Περίφημες είναι οι << τομές Dedekind>> και όρισε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σαν το σύνολο των τομών ρητών αριθμών. Η θεμελίωση αυτή διαφέρει από αυτή του Cantor ο οποίος για τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών χρησιμοποίησε τις ακολουθίες Cauchy των ρητών αριθμών αντί για τις τομές των ρητών αριθμών του Dedekind.

Ο Γερμανός μαθηματικός F.L.G. Frege (1848-1925) ασχολήθηκε με τη θεμελίωση της θεωρίας συνόλων, έδωσε τον ορισμό του πληθικού αριθμού και στα βιβλία του με τίτλο << οι βάσεις της αριθμητικής >> και << βασικοί νόμοι της αριθμητικής >> προσπάθησε να παρουσιάσει τα βασικά σύνολα των αριθμών και τις πράξεις αυτών με τη βοήθεια του πληθικού αριθμού.

Το 1902 ο B. Russell (1872-1970) θεώρησε την ιδιότητα:

P(x): << Το x είναι σύνολο και δεν είναι στοιχείο του x>>.

Οπότε ένα σύνολο x είναι στοιχείο του $A=\{x: P(x)\}$ τότε και μόνο τότε όταν δεν είναι στοιχείο του x. Συνεπώς, αν x=A, τότε το A είναι στοιχείο του A τότε και μόνο τότε όταν το A δεν είναι στοιχείο του A. Το παράδοξο αυτό είναι γνωστό ως το παράδοξο του Russell. Το πρόβλημα αυτό όμως όπως και διάφορα άλλα προβλήματα αντιφατικότητας αντιμετωπίστηκαν με την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Κατασκευάστηκαν δηλαδή συστήματα από << θεμελιώδεις >> ιδιότητες, οι οποίες καλούνται αξιώματα, την αλήθεια των οποίων δεχόμαστε και κατόπιν από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα. Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων για να είναι παραδεκτό πρέπει να έχει τα εξής γνωρίσματα:

(1) Να είναι πλήρες, δηλαδή να στηρίζει και να καλύπτει ολόκληρη τη θεωρία για την οποία έχουν δημιουργηθεί.

(2) Να είναι ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει ως συνέπεια των άλλων αξιωμάτων.

(3) Να είναι ελεύθερο αντιφάσεων, δηλαδή μια πρόταση και η άρνηση της πρότασης αυτής δεν μπορεί να προκύπτουν από το σύστημα αξιωμάτων που έχουμε θεσπίσει για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Γενικότερα τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων είναι δύο διαφορετικών ειδών:

(1) Τα λογικά παράδοξα, τα οποία προκύπτουν απο τη λανθασμένη χρήση της λογικής και τα

(2) Τα σημασιολογικά παράδοξα, τα οποία προκύπτουν απο την λανθασμένη χρήση της γλώσσας.

Το απλούστερο λογικό παράδοξο είναι το παράδοξο του Russell, που περιγράψαμε παραπάνω, που δημιουργήθηκε το 1902 και βρέθηκε επίσης ανεξάρτητα απο τον Zermelo.

Το χαρακτηριστικότερο των σημασιολογικών παραδόξων είναι το παράδοξο του Berry. Συμφωνα με τον Berry, έστω ότι ολες οι λέξεις της ελληνικής γλώσσας παρατίθενται σε κάποιο λεξικό. Εστω T το σύνολο των φυσικών αριθμών που μπορούν να περιγραφούν σε λιγότερες απο είκοσι λέξεις. Δεδομένου ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ελληνικών λέξεων που μπορούν να περιγράψουν αυτούς τους φυσικούς αριθμούς, προφανώς το σύνολο T είναι πεπερασμένο.
Επομένως << υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός που δεν μπορεί να περιγραφεί σε λιγότερες απο είκοσι λέξεις >>. Εξ' ορισμού αυτός ο αριθμός δεν ανήκει στο σύνολο T. όμως ήδη εμείς τον περιγράψαμε με δεκαπέντε λέξεις. Συνεπώς πρέπει να ανήκει στο σύνολο T. οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση.

Όμως η θεωρία συνόλων δεν καταργήθηκε λόγω των αντινομιών αλλά επιδιώχθηκαν τρόποι που θα στήριζαν τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της θεωρίας συνόλων αποβάλλοντας τα παράδοξα.

Το 1908 ο E. Zermelo (1871-1953) παρουσίασε σαν μια πρώτη προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων ένα σύστημα αξιωμάτων. Αργότερα ο A. Fraenkel (1891-1965) πρόσθεσε ένα ακόμη αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων που είχε προτείνει ο E. Zermelo και το 1925 προστέθηκε ένα ακόμη αξίωμα, η πατρότητα του οποίου δεν είναι γνωστή.

Ο K. Gddotodel (1906-1978) το 1931 έδωσε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα ότι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων δεν θα μας οδηγήσουν σε αντιφάσεις. Το 1940 απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής είναι απαραίτητο για την Ανάλυση και είναι συμβιβαστό με τα άλλα αξιώματα της θεωρίας συνόλων.

Το 1963 ο Paul Cohen απέδειξε ότι το αξίωμα της επιλογής είναι ανεξάρτητο των άλλων αξιωμάτων.

Ο J. von Neumann (1903-1957) γεννήθηκε στη Βουδαπέστη και στα 23 του χρόνια παρουσίασε ένα σύστημα αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων εναλλακτικό του συστήματος αξιωμάτων των Zermelo και Fraenkel. Από το 1927 έως το 1930 δίδαξε στα πανεπιστήμια του Αμβούργου και Βερολίνου και το 1930 πήγε στο Princeton του New Jersey. θεωρείται από τους πιο δημιουργικούς και πολύπλευρους μαθηματικούς του αιώνα μας.Το εναλλακτικό σύστημα αξιωμάτων που παρουσίασε ο J. vonnewline Neumann είναι γνωστό ως σύστημα αξιωμάτων των Bernays,newline Gddotodel and von Neumann. Αποδείχθηκε ότι στις θεωρίες Zermelo newline - Fraenkel και Bernays - Gddotodel - von Neumann ισχύουν οίδιες ακριβώς προτάσεις για τα σύνολα. Η διαφορά που υπάρχει είναι ότι στη θεωρία των Bernays - Gddotodel - von Neumann δίνεται η έννοια της κλάσης. Τα πάντα στη θεωρία αυτή είναι κλάσεις, ενώ τα σύνολα είναι κλάσεις που είναι στοιχεία άλλων κλάσεων.