ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΑ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

ΔΟΜΗ: [Αυτό που θέλω να δούμε είναι πρώτα να καταλάβουμε πως σκέφτονταν οι Αιγύπτιοι (σε σχέση με την αριθμητική) και μετά να συνειδητοποιήσουμε πόσους (και ποιους) αγώνες χρειάστηκε η ανθρωπότητα για να φτάσει σε ένα ποιο απλό αριθμητικό σύστημα. Η αναζήτηση μου εστιάζεται στην έννοια της διαίρεσης και του κλάσματος. Έχω παραλείψει αρκετά από το βιβλίο και τα αιγυπτιακά μαθηματικά αλλά στις σημειώσεις υπάρχουν αρκετά περισσότερα] [Αναζήτησα την εξελικτική πορεία της έννοιας του κλάσματος μέσα στον χρόνο. Αυτό δεν είναι καθόλου εύκολο γιατί πρέπει να μπεις στο πνεύμα της κάθε εποχής.] [Ξέρω ότι πολλοί μαθηματικοί ίσως είναι αντίθετοι με αυτό το «ψείρισμα» των μαθηματικών. Τους ενδιαφέρει κυρίως η παραγωγή μαθηματικών και όχι η αναζήτηση του πλαισίου ανακάλυψης τους. Ωστόσο για την διδακτική των μαθηματικών όλο και περισσότεροι ερευνητές θεωρούν ότι (Π. Σπύρου, Επιστημολογίες για την διδακτική των μαθηματικών, Αθήνα 2009)«η γνώση του πλαισίου της ιστορικής γένεσης και ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών (ιστορική επιστημονολογία) και της ιδέας των ιστορικών μετατοπίσεων των θεωριών ή ακόμα το πλαίσιο μιας κοινωνιολογίας της γνώσης, μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να αυξήσει την ωριμότητά του και τις ευαισθησίες του ώστε να σταθεί με ένα αναστοχαστικό και μεταγνωστικό βλέμμα προς την καθημερινή του προσπάθεια». Τα μαθηματικά για τους μαθηματικούς και κυρίως για τους μαθητές στο σχολείο, ξεκινάνε από δοσμένους ορισμούς. Ωστόσο η μελέτη ενός λογοτεχνικού βιβλίου νομίζω μπορεί πολύ εύκολα να απελευθερώσει «φιλοσοφικές» αναζητήσεις στους μαθητές μας αλλά και σε εμάς του τύπου: **«πως έγιναν τα πράγματα και γιατί έγιναν έτσι;»** Αυτές οι αναζητήσεις, που μπορούν να μας φέρουν πολύ πιο κοντά στο τι είναι τα μαθηματικά και στην αξία τους και την ομορφιά τους, είναι νομίζω ένα σημαντικό (από τα πολλά) οφέλη που μπορούμε να πάρουμε, εμείς και οι μαθητές μας, από την συμμετοχή μας σε μια σχολική λέσχη ανάγνωσης μαθηματικής λογοτεχνίας.

- **<u>ΑΙΓΥΠΤΙΑΚΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ</u> :**

(Το παρακάτω είναι από το βιβλίο του Gillings σελίδα 16 σε μια πρόχειρη μετάφραση. Αλλάζω λίγο την σειρά παρουσίασης.)
Ας κάνουμε με τον Αιγυπτιακό τρόπο τον πολλαπλασιασμό 8 επί 7.

MULTIPLY 8 BY 7

	\1	8
	\2	16
	\4	32
Totals	7	56

Όταν ο αιγύπτιος γραφέας έπρεπε να πολλαπλασιάσει δύο αριθμούς, αποφάσιζε αρχικά όποιος θα ήταν ο πολλαπλασιαστέος, κατόπιν θα πολλαπλασίαζε επανειλημμένα αυτόν με 2, προσθέτοντας τους ενδιάμεσους πολλαπλασιαστές έως ότου έδιναν άθροισμα τον αρχικό πολλαπλασιαστή. Παραδείγματος χάριν, για να πολλαπλασιάσει 8 επί 7, υπέθετε ως πολλαπλασιαστέο το 8, και τον διπλασίαζε συνεχώς σταματώντας ένα βήμα πριν πάρει αριθμό (στην αριστερή στήλη) μεγαλύτερο από τον πολλαπλασιαστή 7. Κατόπιν παρατηρούσε ότι 1 + 2 + 4 = 7. Έτσι τσεκάριζε αυτούς τους πολλαπλασιαστές που έδιναν άθροισμα 7 και πρόσθετε τα γινόμενά τους με το 8.

Πολλοί κατά καιρούς έχουν εκφραστεί υποτιμητικά για τον Αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό.

Αν ο Αιγυπτιακός πολλαπλασιασμός ήταν τόσο κακότεχνος και δύσκολος, τότε πως γίνεται αυτές οι ίδιες τεχνικές να παραμένουν σε χρήση στην περίοδο των Κοπτών, των Ελλήνων, ακόμα και την περίοδο των Βυζαντινών και για περισσότερα από 1000 χρόνια μετά; Κανένα έθνος για περισσότερα από 1000 χρόνια [ή 3000;] δεν κατάφερε να βελτιώσει την Αιγυπτιακή μέθοδο και τον συμβολισμό. Η αλήθεια είναι ότι, παρά τον συμβολισμό τους, οι Αιγύπτιοι ήταν ειδήμονες στο να λύνουν αριθμητικά προβλήματα και ήταν πολύ ικανοί στο να επινοούν έξυπνες μεθόδους για να επιλύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά προβλήματα τόσο καλά που οι διάδοχοι τους παρέμειναν ικανοποιημένοι με αυτό που παρέλαβαν. Πόσο μακριά έχουμε προχωρήσει στον πολλαπλασιασμό από την εποχή των αρχαίων Αιγυπτίων, ή ακόμα και από τους ελληνικούς και ρωμαϊκούς χρόνους; Ποιοι λόγοι συντρέχουν ώστε να είμαστε τόσο κριτικοί απέναντι στον Αιγυπτιακό πολλαπλασιασμό στον οποίο το μόνο απαραίτητο ήταν να χρησιμοποιούν τον πίνακα διπλασιασμού;

Στις αγγλόφωνες χώρες, τουλάχιστον μέχρι το τέλος του 16ου αιώνα δεν ήταν μέρος της εκπαίδευσής τους να μαθαίνουν τον γνωστό μας σήμερα πίνακα του πολλαπλασιασμού.

Ο Samuel Pepys, ο διάσημος χρονικογράφος, που εκπαιδεύτηκε στο σχολείο ST Paul και στο Magdalen College, στο Πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ, «ένα ικανό άτομο των επιχειρήσεων» ήταν γραμματέας στο βρετανικό ναυαρχείο, και σε εκείνη την θέση πρέπει σίγουρα να ήξερε από υπολογισμούς. Αλλά σημειώστε αυτήν την εισαγωγή:

July 4. 1662.... Up by 5 o'clock.... Comes M. Cooper of whom I intend to learn mathematiques, and do, being with him to-day. Αφού ασχολούμουν μαζί του για μια ώρα στην αριθμητική, έκανα την πρώτη μου απόπειρα να μάθω τον πίνακα πολλαπλασιασμού.

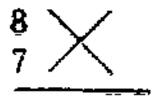
Αν ένας πτυχιούχος του Πανεπιστημίου του Κέιμπριτζ ξεκίναγε στα τριάντα του να μάθη προπαίδεια, τι να υποθέσουμε για έναν μέσο μαθητή της εποχής εκείνης;

Το 1542 η Welshman Robert Recorde δημοσίευσε το βιβλίο «*The Grounde of Artes. Teachyng the Worke and Practice of Arithmetike" στο οποίο δείχνει πως* να πολλαπλασιάζεις δύο αριθμούς ανάμεσα στο 5 και στο 10.

MULTIPLY 8 BY 7

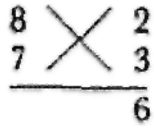
First set your digits one over the other.

Then from the uppermost downwards, and from the nethermost upwards, draw straight lines, so that they make a St. Andrew's cross.

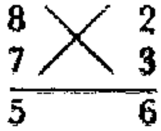


Then look how many each of them lacketh of 10 (διαφέρει από το 10), and write that against each of them at the end of the line, and that is called the difference.

I multiply the two differences, saying, " two times three make six," that must I ever set down under the differences. **(Δηλαδή το 6 προκύπτει από το γινόμενο των διαφορών των δύο αριθμών από το 10)**



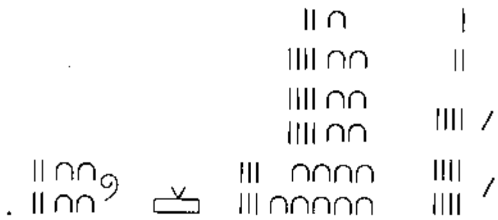
Take from the other digit, (not from his own), as the lines of the cross warn me, and that that is left, must I write under the digits. If I take 2 from 7, or 3 from 8, (which I will, for all is lyke), and there remaineth 5, and then there appeaieth the multiplication of 8 times 7 to be 56. A chylde can do it.



(Δηλαδή το 5 προκύπτει από την αφαίρεση 8 – 3 ή 7 – 2)

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 32

Το πρόβλημα 32 στον πάπυρο τού Ριντ δείχνει ποια ακριβώς διαδικασία ακολουθούσαν οι Αιγύπτιοι προκειμένου να υπολογίσουν το γινόμενο 12 χ 12. Προχωρούσαν (διαβάζουμε από τα δεξιά προς τα αριστερά) έτσι:



[**εδώ φαίνεται καθαρά πόσο βόλευε ο διπλασιασμός στον δικό τους συμβολισμό…**Άρα το σύστημα συμβολισμού καθορίζει και τους τρόπους;]

Το σύμβολο , στην τελευταία σειρά των υπολογισμών πού γίνηκαν με τα ιερογλυφικά, παριστάνει ένα ρολό από πάπυρο και σημαίνει: "*Το συμπέρασμα είναι τούτο*".

Μπορεί να γεννηθεί το ερώτημα: Μ' αύτη τη **μέθοδο διπλασιασμού και πρόσθεσης** μπορούμε πάντοτε να εκτελέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλασιασμό; *Ναι, αν πάντοτε μπορούμε να γράψουμε τον πολλαπλασιαστή ως άθροισμα δυνάμεων του 2.* Κι αυτό είναι πάντοτε δυνατό; *Ή απάντηση είναι: Ναι!* Ένα παράδειγμα θα μάς το διασαφηνίσει. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το 237 με το 18, παίρνοντας για πολλαπλασιαστή το 237. Θα πρέπει λοιπόν να μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό αυτό ως άθροισμα δυνάμεων τού 2. Οι εννέα πρώτες δυνάμεις τού 2 είναι:

$2^0 = 1$	$2^3 = 8$	$2^6 = 64$
$2^1 = 2$	$2^4 = 16$	$2^7 = 128$
$2^2 = 4$	$2^5 = 32$	$2^8 = 256.$

Τώρα, ας γράψουμε τον αριθμό 237 ως άθροισμα δυνάμεων του 2:

$$\begin{aligned}237 &= \underline{128} + 109,\\ &\text{ἀλλά } 109 = \underline{64} + 45\\ &\qquad\text{καί } 45 = \underline{32} + 13\\ &\qquad\qquad\text{καί } 13 = \underline{8} + 5\\ &\qquad\qquad\qquad\text{καί } 5 = \underline{4} + 1.\end{aligned}$$

Ἑπομένως, $237 = 128 + 64 + 32 + 8 + 4 + 1,$

ἤ $237 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0.$

Και ο οποιοσδήποτε άλλος πολλαπλασιαστής μπορεί να γραφτεί με όμοιο τρόπο ως άθροισμα δυνάμεων του 2. [!] [Δηλαδή μπορεί να γραφτεί στο δυαδικό σύστημα]

Προχωρούμε τώρα στον πολλαπλασιασμό των αριθμών 237 και 18. Έχουμε

$$\begin{aligned}237 \times 18 &= (2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 1) \times 18\\ &= (2^7 \cdot 18) + (2^6 \cdot 18) + (2^5 \cdot 18)\\ &\quad + (2^3 \cdot 18) + (2^2 \cdot 18) + (1 \cdot 18).\end{aligned}$$

Η διάταξη πού ταιριάζει στους υπολογισμούς των Αιγυπτίων είναι:

\	1	18
	2	36
\	4	72
\	8	144
	16	288
\	32	576
\	64	1152
\	128	2304
	237	4266.

Χωρισμός 6 ψωμιών σε 10 ανθρώπους

- Γιατί μόνο κλασματικές μονάδες;
- Η δραστηριότητα αυτή αντιστοιχεί στο πρόβλημα 3 του πάπυρου Ριντ που στο βιβλίο περιγράφεται στις σελίδες 94 – 95
- Για τους υπολογισμούς του Αχμές να κάνουμε την διαίρεση: Λογάριασε με το 10 μέχρι να βρεις 6)
- Στο ποια λύση είναι καλύτερη: Από σύγχρονης μαθηματικής απόψεως η λύση της νοικοκυράς είναι καλύτερη (η νοικοκυρά μπορεί να φτάσει και στην ιδέα ότι ο καθένας θα πάρει τα 6/10 ψωμιού). Η λύση που δίνει είναι πιο γενική. Του Αχμές είναι καλύτερη από πρακτική άποψη (λιγότεροι και πιο εύκολοι

χωρισμοί ή ακόμα και από την άποψη ότι το ψωμί διατηρείται καλύτερα). Ο Αχμές πρώτα τα χωρίζει στην μεγαλύτερη μονάδα που μπορεί και μετά συνεχίζει. (Η λογική του είναι μακριά από το 6/10)

<u>Λογάριασε από το 10 μέχρι να φτάσεις στο 6</u>

	1	10	
/	$\overline{2}$	5	(μου λείπουν ακόμα 1)
/	$\overline{10}$	1	

Άρα 6:10 = $\overline{2}\ \overline{10}$

[Στο βιβλίο «Αχμές» οι διαιρέσεις εκφράζονται λεκτικά]

- **Ο Φιμπονάτσι**: Αν το αφήσουμε 6/10 νομίζω μπορούμε να πάμε μόνο με την 7η κατηγορία (Συλβέστερ). Αν το γράψουμε σαν το ισοδύναμο 3/5 τότε είμαστε στην 3η κατηγορία: $\frac{3}{5}=\frac{3}{3\cdot 2-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$
- **Ο Συλβέστερ**: Διαίρεσε το 10 με το 6. Το πηλίκο είναι ανάμεσα στο 1 και στο 2. Άρα 1 < 10/6 < 2 και συνεπώς 1/2 < 6/10 < 1. Δηλαδή η μεγαλύτερη κλασματική μονάδα που είναι μικρότερη από το 6/10 είναι το 1/2. Αφαιρείς το 6/10 με το 1/2: 6/10 – 1/2 = 1/10. Άρα 6/10 = 1/2 + 1/10.

- **<u>Για τις κλασματικές μονάδες των Αιγυπτίων (θεωρία)</u>**:

(Δες και αρχείο Συλβέστερ B])

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα 34 του πάπυρου Ριντ σε ακριβή μετάφραση από το πρωτότυπο (παρμένο (εν μέρει) από το βιβλίο του Cajori “A history of mathematical notations” σελ.14 – 16.

«Μιας ποσότητας το μισό της και το τέταρτό της και το ολόκληρό της μας δίνουν 10. Ποια είναι η ποσότητα;»

Στην παρακάτω μετάφραση **διαβάζουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά (αντίθετα από το πρωτότυπο κείμενο).**

Four	—	One-fourth	×	
Five		Heap		See Fig. 7
Seven		The whole		See Fig. 7
One-half		It gives		See Fig. 7

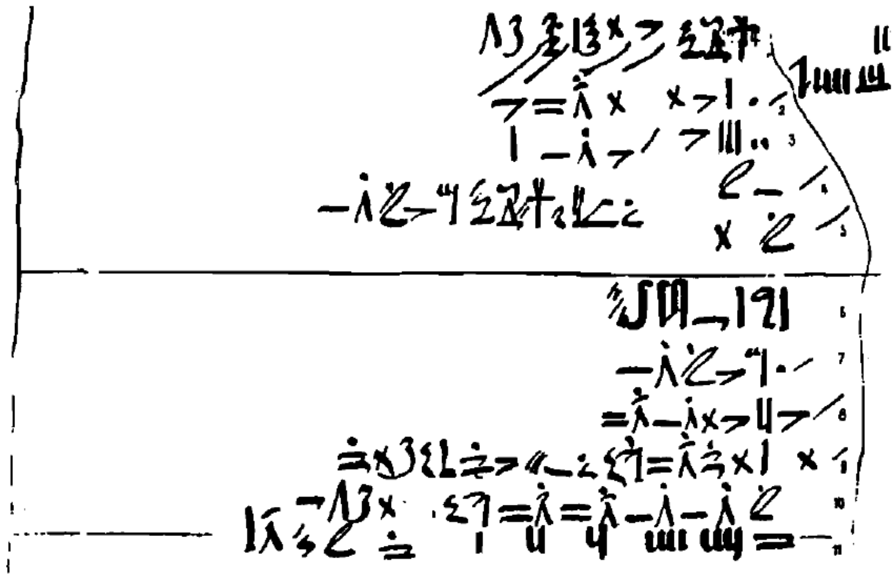


FIG. 7.—An algebraic equation and its solution in the Ahmes papyrus, 1700 B.C., or, according to recent authorities, 1550 B.C. (Problem 34, Plate XIII in Eisenlohr; p. 70 in Peet; in chancellor Chace's forthcoming edition, p. 76, as R. C. Archibald informs the writer.)

[Εικόνα 7: μια αλγεβρική εξίσωση και η λύση της στον πάπυρο Αχμές του 1700 π.Χ ή σύμφωνα με νέες θεωρήσεις, το 1550 π.Χ]

<u>Μετάφραση</u>:

Νούμερο 34: Μια ποσότητα το $\overline{2}$ *και το* $\overline{4}$ *δίνουν 10.*

/	1	1 $\overline{2}$ $\overline{4}$	
	2	3 $\overline{2}$	[μέχρι το
/	4	7	
/	$\overline{7}$	$\overline{4}$	

[Τις τρεις παρακάτω σειρές στο πρωτότυπο τις γράφει δίπλα]

	$\overline{4}$ $\overline{28}$	$\overline{2}$
/	$\overline{2}$ $\overline{4}$	1

Μαζί η ποσότητα είναι 5 $\overline{2}$ $\overline{7}$ $\overline{14}$

Αρχή της απόδειξης

/	1	5 $\overline{2}$ $\overline{7}$ $\overline{14}$
/	$\overline{2}$	2 $\overline{2}$ $\overline{4}$ $\overline{14}$ $\overline{28}$
/	$\overline{4}$	1 $\overline{4}$ $\overline{8}$ $\overline{28}$ $\overline{56}$

Μαζί 9 $\overline{2}$ $\overline{8}$ μένει $\overline{4}$ $\overline{8}$

$\overline{7}$ $\overline{14}$ $\overline{14}$ $\overline{28}$ $\overline{28}$ $\overline{56}$ Το $\overline{4}$ *δίνει* 14.

8 4 4 2 2 1 Το $\overline{8}$ δίνει 7. *Μαζί 21.*

<u>ΑΝΑΛΥΣΗ (Δική μας)</u>

Νούμερο 34: Μια ποσότητα το $\overline{2}$ *και το* $\overline{4}$ *δίνουν 10.*

/ 1 1 $\overline{2}$ $\overline{4}$	Πρόσθεσε αρχίζοντας με το ένα και μισό και τέταρτο μέρος μέχρι να βρεις 10.
2 3 $\overline{2}$	Το διπλάσιο
/ 4 7	Μέχρι τώρα έχουμε άθροισμα (στην δεξιά στήλη) 8 $\overline{2}$ $\overline{4}$. Μέχρι το 10 θέλουμε ακόμα 1 $\overline{4}$. Θα κινηθούμε ως εξής: θα βρούμε πρώτα το $\overline{4}$ μετά το $\overline{2}$ και τελικά το 1.
/ $\overline{7}$ $\overline{4}$ [Αφού στο 4 αντιστοιχεί στο 7 άρα το $\overline{7}$ αντιστοιχεί στο $\overline{4}$]	Από την προηγούμενη γραμμή έχουμε ότι το 4πλάσιο του 1 $\overline{2}$ $\overline{4}$ είναι 7. Άρα πρέπει να βρούμε τι σχέση έχει το $\overline{4}$ με το 7 για να βρούμε τι θα γράψουμε στην αριστερή στήλη. Κάνουμε 7 δια $\overline{4}$ (δηλαδή βρίσκουμε με ποιόν αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $\overline{4}$ για να βρούμε 7) και βρίσκουμε 28. Για αυτό κάνουμε 4 : 28 = $\overline{7}$.

[Τις τρεις παρακάτω σειρές στο πρωτότυπο τις γράφει δίπλα]

$\overline{4}$ $\overline{28}$ $\overline{2}$	Διπλασιάζει και τις δύο στήλες για να προκύψει το $\overline{2}$ [πίνακας 2/η]
/ $\overline{2}$ $\overline{14}$ 1	Διπλασιάζει πάλι για να προκύψει το 1.

Μαζί η ποσότητα είναι 5 $\overline{2}$ $\overline{7}$ $\overline{14}$	Προσθέτει ότι σημείωσε στην αριστερή στήλη και βρίσκει την ποσότητα που ψάχνει (το άθροισμα των αντίστοιχων αριθμών στην δεξιά στήλη είναι 10)

Αρχή της απόδειξης

/ 1 5 $\overline{2}$ $\overline{7}$ $\overline{14}$	Η ποσότητα και το μισό της και το τέταρτό της θα δείξουμε ότι κάνει 10
/ $\overline{2}$ 2 $\overline{2}$ $\overline{4}$ $\overline{14}$ $\overline{28}$	
/ $\overline{4}$ 1 $\overline{4}$ $\overline{8}$ $\overline{28}$ $\overline{56}$	

Μαζί 9 $\overline{2}$ $\overline{8}$ μένει $\overline{4}$ $\overline{8}$		Δηλαδή προσθέτει τους ακεραίους (5, 2, 1) της δεξιάς στήλης και τα κλάσματα $\overline{2}$ και $\overline{2}$ (που κάνει 1) και $\overline{4}$ και $\overline{4}$ (που κάνει $\overline{2}$) και το $\overline{8}$ (που μένει μόνο του μαζί με το $\overline{2}$). Μένει $\overline{4}$ $\overline{8}$ μέχρι το 10.
$\overline{7}$ $\overline{14}$ $\overline{14}$ $\overline{28}$ $\overline{28}$ $\overline{56}$	Το $\overline{4}$ *δίνει* 14.	Προσθέτει τα υπόλοιπα κλάσματα χρησιμοποιώντας κόκκινους αριθμούς (εδώ τους σημειώνουμε με παχιά γράμματα)
8 4 4 2 2 1	Το $\overline{8}$ δίνει 7. *Μαζί 21.*	Θεωρεί σαν νέα μονάδα το $\overline{56}$ της παλιάς. Οπότε το $\overline{7}$ είναι 8 νέες μονάδες , το $\overline{14}$ είναι 4 νέες μονάδες κ.λ.π Δηλαδή είναι σαν να τρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. Οι κόκκινοι αριθμοί μαζί κάνουν 21 (δηλαδή 21 νέες μονάδες δηλαδή 21 φορές το $\overline{56}$). Αλλά και το $\overline{4}$ $\overline{8}$ κάνει 14 και 7 νέες μονάδες δηλαδή και αυτό κάνει 21 νέες μονάδες. Οπότε το βρήκαμε σωστά.

[Άρα η απάντηση είναι 5 $\overline{2}$ $\overline{7}$ $\overline{14}$]

<u>Παρατηρήσεις από το βιβλίο του Gillings [Για την χρήση μοναδιαίων κλασμάτων]</u>

Όταν ο αιγύπτιος γραφέας έπρεπε να κάνει υπολογισμούς με κλάσματα αντιμετώπιζε πολλές δυσκολίες που προέκυπταν από τους περιορισμούς των συμβόλων που χρησιμοποιούσε. **Η μέθοδος που χρησιμοποιούσε για να γράφει αριθμούς δεν του επέτρεπε να απλά κλάσματα όπως 3/5 ή 5/9 επειδή όλα τα κλάσματα έπρεπε να έχουν την μονάδα για τον αριθμητή** (με εξαίρεση το 2/3 που είχε ειδικό σύμβολο). Κι αυτό γιατί έπρεπε να βάζει το ιερογλυφικό σύμβολο «ανοιχτό στόμα» πάνω από οποιονδήποτε ακέραιο για να υποδηλώνει ότι είναι παρανομαστής. Στην ιερατική γραφή έβαζε μια τελεία πάνω από τον αριθμό.

[<u>Άλλες ερμηνείες για την χρήση αποκλειστικά κλασματικών μονάδων:</u>
- http://www.mathpages.com/HOME/kmath340/kmath340.htm
Ο Darrah Chavey παρατηρεί ότι ο συμβολισμός των αιγυπτίων για τα κλάσματα υπονοεί ένα σύμβολο με μία μεταβλητή (τον παρανομαστή).
Και αυτό δεν προσαρμόζει εύκολα τις δύο μεταβλητές που απαιτούνται για να εκφράσουν την αναλογία ενός αυθαίρετου αριθμητή και ενός παρονομαστή. Θα ήταν απαραίτητο να επινοηθεί ένας απολύτως νέος συμβολισμός. Και επιπλέον αυτού του γεγονότος μπορεί να ήταν δύσκολο για αυτούς να φανταστούν μια ενιαία ποσότητα με δύο μεταβλητά και ανεξάρτητα στοιχεία. Μπορούσαν να προσθέσουν κλασματικές μονάδες αλλά δεν θα μπορούσαν εννοιολογικά να τα συνθέσουν εννοιολογικά σε μια νέα οντότητα. **Αντίθετα αναζητούσαν απλές «ακέραιες» («whole») κλασματικές ποσότητες. Ακριβώς όπως οι «whole» φυσικοί αριθμοί είναι της μορφής ν/1, ήταν φυσικό να φανταστούν ότι οι «whole» κλασματικοί αριθμοί είναι της μορφής 1/ν**.]
[<u>Δική μου παρατήρηση</u>: Θα δούμε όμως αργότερα όταν θα μιλήσουμε για τον Φιμπονάτσι ότι παρότι έχει πια καθιερωθεί η έννοια του κλάσματος, δεν έχουν εγκαταλειφθεί οι κλασματικές μονάδες.]

Όλα τα άλλα κλάσματα τα έγραφε σαν αθροίσματα κλασματικών μονάδων. Για παράδειγμα, αντί για το 3/4 έγραφε: 1/2 + 1/4.
Σε μας σήμερα αυτό φαίνεται άχρηστο και περίπλοκο, αλλά θα δούμε ότι οι αιγύπτιοι γραφείς κατασκεύασαν μέσα και κανόνες που περιόριζαν τις δυσκολίες.
Στον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση με κλάσματα, οι γραφείς χρησιμοποιούσαν την ίδια εκκίνηση όπως έκαναν με τους ακέραιους, αλλά έπρεπε να χρησιμοποιούν διάφορες τεχνικές για τα διάφορα προβλήματα που προέκυπταν.

[για σχόλια πάνω στην αξία των κλασματικών μονάδων δες και Fowler]

[Ο Van Der Waerden (δες και το σχετικό αρχείο σελ. 8 – 9) λέει σχετικά:

… …**Στο σημείο αυτό (σχετικά με τον διπλασιασμό του $\overline{9}$) ο αναγνώστης μπορεί να ρωτήσει: γιατί να μην το άφηναν έτσι, αρκούμενοι στην μορφή $\overline{9} + \overline{9}$;**

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, αρκεί να εξετάσουμε τι θα συνέβαινε όταν θα προχωρούσε παραπέρα ο υπολογισμός. Διπλασιάζοντας το $\overline{9} + \overline{9}$, θα προέκυπτε $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$, ενώ ένας τρίτος διπλασιασμός θα έδινε $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$. Προφανώς, αυτή η χωρίς νόημα συσσώρευση κλασματικών μονάδων έχει μικρή αξία.

Γι' αυτό ο Αιγύπτιος εργάζεται ως εξής:

1	$\overline{9}$
2	$\overline{6} + \overline{18}$
4	$\overline{3} + \overline{9}$
8	$\overline{3} + \overline{6} + \overline{18}$

Βρίσκει, δηλαδή, εκφράσεις οι οποίες είναι εύκολες στον χειρισμό και περιέχουν, εκτός από φυσικά κλάσματα, όπως το $\overline{\overline{3}}$ το $\overline{3}$. το $\overline{6}$, λίγες κλασματικές μονάδες με μεγαλύτερους παρονομαστές, η τάξη μεγέθους των οποίων γρήγορα απομνημονεύεται και είναι εύκολες στον χειρισμό.

Σε αυτό θα μπορούσε κάποιος να ανταπαντήσει ότι οι Αιγύπτιοι θα μπορούσαν να είχαν σκεφτεί έναν συντομότερο τρόπο να γράψουν το $\overline{9} + \overline{9}$ και το $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$ **χρησιμοποιώντας κάτι σαν τους δικούς μας αριθμητές και παρονομαστές**.

Θα απαντούσαμε λέγοντας ότι πρέπει να δεχθούμε το γεγονός πως οι Αιγύπτιοι δεν ήταν σαν τους σύγχρονους μαθηματικούς, οι οποίοι εισάγουν αμέσως συντομογραφίες για κάθε έκφραση που εμφανίζεται συχνά. Ήταν **άκρως συντηρητικοί**, [αυτό θα μπορούσε να συνδυαστεί με αυτά που θα πει ο Απόστολος] ακολουθούσαν πιστά τις αρχαίες παραδόσεις και επέμεναν στους εν χρήσει συμβολισμούς. Ένα παράδειγμα είναι το γεγονός ότι επί χιλιάδες χρόνια τα αιγυπτιακά κείμενα συνέχιζαν να μιλούν για «τα δύο βασίλεια», ενώ η Άνω και η Κάτω Αίγυπτος είχαν προ πολλού ενοποιηθεί σε μια αυτοκρατορία.]

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

[**ΑΠΟ ΤΟΝ Fowler (The Mathematics of Plato’s Academy)**

Η πρακτική και η δημοφιλία των κοινών κλασμάτων (ως συμβολισμός και ως έννοιες)   αναπτύχθηκε κυρίως ανάμεσα σε Ιταλούς μαθηματικούς του 9ου ή 10ου αιώνα.

Φυσικά, ο χειρισμός των κλασμάτων εκφρασμένων σαν μοναδιαία κλάσματα είναι (αριθμητικά) ισοδύναμα με τους ίδιους χειρισμούς όταν εκφράζονται σαν κοινά κλάσματα. Αλλά αυτά θα θεωρούνταν διαφορετικά μέσα στα δύο αυτά συστήματα. Μερικές πράξεις θα έρχονταν πολύ κοντά η μία στην άλλη. Για παράδειγμα ο χειρισμός του **«ν – οστού των μ» με το ισοδύναμο «το κν – οστό των κμ»** είναι παράλληλο με την ταυτότητα μ/ν = κμ/κν, αλλά πολύ μακριά από αυτό σε αντίληψη. Και ένα σύνηθες βήμα στην δική μας μαρτυρία είναι ο χειρισμός «….» ισοδύναμος με το μ/ν + π/ν = (μ + π)/ν. Αλλά η αντιστροφή δίνει ένα παράδειγμα μιας πράξης που καταδεικνύει τον εαυτό της πολύ διαφορετικά στα δύο συστήματα.
Για παράδειγμα η σχέση μεταξύ των 7/17 και 2 3/7 (είναι αντίστροφοι) είναι πιο φανερή από αυτή μεταξύ των 3' 17' 51' και 2 3' 15' 35'. Θα αρκούσε μόνο ένα παράδειγμα από κάποια πράξη, όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση δύο κλασματικών ποσοτήτων, εκφρασμένη ευθέως ως κάτι σαν «το νιοστό του μ πολλαπλασιαζόμενο με το ***qth* of *p*** δίνει το **nqth of *mp»*** και καθαρά ανεξάρτητα, από το πλαίσιο, σε κάθε σύλληψη με όρους απλών και σύνθετων μερών, θα ήταν μοιραία στην άποψή μου ότι δεν έχουμε κανένα καλό στοιχείο για την χρήση από τους Έλληνες [και τους Αιγυπτίους] της έννοιας των κοινών κλασμάτων. Δεν ξέρω κανένα τέτοιο παράδειγμα.

Μπορούμε να πάμε παραπέρα την εξήγησή μου. Πρώτα θεωρούμε την φόρμα της σύντμησης στην οποία η στερεότυπη φράση «των μ το ν» γράφεται

phrase ‘τῶν *m* τὸ *ń*’ is written $\overset{\acute{n}}{m}$ with

όπως συνήθως εκφραζόταν, «τον αριθμητή και τον παρανομαστή αντίστροφους»[92]. Η πρακτική της γραφής ενός γράμματος πάνω από ένα άλλο είναι πολύ συνηθισμένο σε συντμήσεις που βρέθηκαν σε διάφορους Ελληνικούς παπύρους [αναφέρει διάφορα παραδείγματα]
[Στην παραπομπή 92 λέει ότι παρόμοια γραφή για τα κλάσματα (με τον αριθμητή κάτω από τον παρανομαστή) βλέπουμε στα κείμενα του Διόφαντου και του Ήρωνα.]

[91]For a recent, useful, detailed study of Greek and Egyptian fractional techniques, see Knorr, TFAEG. But what are presented there as manipulations of common fractions **m/n are clearly manipulations of the descriptions 'the nth of *m'*** which are conceived throughout the texts under discussion in terms of unit fractions. See pp. 148-51 on the Archmim Mathematical Papyrus, for example on p. 150: "Although the problems are invariably expressed in terms of unit-fractions and the final solutions are given in this same mode, the actual execution of the arithmetic operations first introduces their conversion (μετατροπή) to terms of the form *a/b*
(but here a/b invariably abbreviates the expression ***των a το b****);* and "Thus, the scribes in the arithmetic tradition of late antiquity present themselves as *virtuosi* in the art of manipulating unit-fractions; yet their very methods reveal this to be a superfluous art. **How was it possible that they failed to perceive this**, embellishing these techniques and so distracting from the teaching and development of the more general techniques of [common] fractions employed within their computations?" (**The answer here is surely that the scribes were actually conceiving, teaching, and developing unit fraction techniques, and had little or no conception of common fractions.)**

[92] See, for an influential example, Heath, *HGM* i, 43 f.: "The most convenient notation of all [for common fractions] is that which is regularly employed by Diophantus, and occasionally in the *Metrica* of Heron**. In this system the numerator of any fraction is written in the line, with the denominator *above* it, without accents or other marks (except where the numerator or denominator itself contains an accented fraction); the method is therefore** simply the reverse of ours, but equally convenient. In Tannery's edition of Diophantus a line is put between the numerator below and the denominator above ... but it is better to omit the horizontal line (cf. $\overset{\rho\kappa\eta}{\rho} = \frac{100}{128}$ in Kenyon's Papyri ii, No. cclxv.40, and the fractions in Schdne's edition of Herons *metrica)."*

[**Στο βιβλίο του Cajori «A history of mathematical notation»** (σελ. 310) επιβεβαιώνεται η παραπάνω πληροφορία για την γραφή του Διόφαντου και μας λέει ακόμα ότι σε γραπτά Βυζαντινών συναντάμε και γραφή όπου ο παρανομαστής έχει την θέση εκθέτη (π.χ $\theta^{\iota\alpha}$ για το 9/11). Οι ινδοί ήταν οι πρώτοι που έγραψαν τον παρανομαστή κάτω από τον αριθμητή αλλά χωρίς κλασματική γραμμή. Η κλασματική γραμμή εμφανίζεται για πρώτη φορά από έναν άραβα γραφέα τον δωδέκατο αιώνα στην εξής μορφή: «Αν θέλεις να γράψεις τα τρία πέμπτα και ένα τρίτο από τα πέμπτα, γράψε τον παρανομαστή κάτω από μια οριζόντια γραμμή και από πάνω κάθε ένα από τα μέρη που ανήκουν σε αυτό. Δηλαδή γράψε: [διαβάζουμε από δεξιά προς τα αριστερά]

$\frac{3}{5}\frac{1}{3}$ [η γραμμή είναι συνεχόμενη]. Ο Φιμπονάτσι χρησιμοποιεί την κλασματική γραμμή. Στο Liber abaci γράφει: «Όταν πάνω από ένα νούμερο βρίσκεται μια γραμμή και πάνω από αυτήν βρίσκεται ένα άλλο νούμερο, το άνω νούμερο παριστάνει το μέρος ή τα μέρη του κάτω νούμερου. Το κάτω λέγεται παρανομαστής και το άνω ο αριθμητής». **Στον Φιμπονάτσι μια υποδειγμένη διαίρεση και ένα κλάσμα βρίσκονται σε στενή σχέση**.]

[**Τι καταλαβαίνω**: Το κλάσμα μ/ν έτσι όπως το ξέρουμε σήμερα γεννήθηκε σαν ένα σύμβολο που συντομεύει την έκφραση «το νιοστό των μ» η οποία υποδηλώνει την διαίρεση μ:ν (αλλά βέβαια ταυτόχρονα και τα μ νιοστά μέρη της μονάδας).]

- [Από το αρχείο **<u>Van Der Waerden</u>** :

Στις σελίδες 45 έως 47, στο ίδιο βιβλίο, διαβάζουμε για την χρήση των κλασμάτων από τους Αρχαίους Έλληνες, τα παρακάτω:

Λογισμός με κλάσματα.

Ένα σχόλιο, δηλαδή μια παρασελίδια σημείωση, στον *Χαρμίδη* του **Πλάτωνος**, περιγράφει με τις παρακάτω λέξεις τα πιο σημαντικά μέρη της αριθμητικής ή «λογιστικής»: «Οι λεγόμενες ελληνικές και αιγυπτιακές μέθοδοι για τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις, και οι συγκεφαλαιώσεις και διασπάσεις των κλασμάτων των». [Thomas (= Bulmer-Thomas), *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, τόμ. I, σελ. 16-18, Καίμπριτζ, Μασσ. & Λονδίνο 1939, συμπληρωμένη ανατύπωση 1980. (Loeb Classical Library)]

Σχ. 9. Ο θησαυροφύλακας στον αμφορέα του Δαρείου (Εικ. 7) αθροίζει στον άβακα τους φόρους που έχουν συγκεντρωθεί. Από το *Zahlwort und Ziffer* του Menninger.

Οι «συγκεφαλαιώσεις» αναφέρονται προφανώς στην πρόσθεση των κλασμάτων, την οποία ο Ραβδάς εκτελεί όπως ακριβώς και εμείς, με αναγωγή σε κοινό παρονομαστή. Για παράδειγμα, για να προσθέσει 3 και 1/3 και 1/14 μετατρέπει το 1/3 σε δεκατέσσερα τεσσαρακοστά δεύτερα και το 1/14 σε τρία τεσσαρακοστά δεύτερα. Αν προστεθούν στο 1/42 προκύπτουν 14 + 3 + 1 = 18 τεσσαρακοστά δεύτερα, ή 3 έβδομα. Συμποσούμενο με τις 3 μονάδες αυτό δίνει, τελικά, 39 έβδομα.

Τι σημαίνουν οι «διαιρέσεις» των κλασμάτων, μπορούμε να το μάθουμε από τον πάπυρο του Akhmim [ΓΥΡΩ ΣΤΟ 2000 Π.Χ] όπου κλάσματα *m/n* *διασπώνται σε κλασματικές μονάδες* για η = 3, 4, ,.., 20 και για διάφορες τιμές του *m,* όπως για παράδειγμα:

«Το δέκατο έβδομο μέρος του 3 είναι $^1/_{12}$ + $^1/_{17}$ + $^1/_{51}$ + $^1/_{68}$».
[των *Γ* το *ιζ' ιβ' ιζ' να' ξη'*. (J. Baillet, *ό.π.*, σελ. 30)]

Τον συμβολισμό των κλασμάτων τον γνωρίζουμε από τα έργα μεταγενέστερων μαθηματικών (Αρχιμήδης, Ήρων, Διόφαντος) και, ακόμη πιο αξιόπιστα, από παπύρους σαν αυτούς που ήδη μνημονεύσαμε, διότι αυτοί είναι αυθεντικοί και όχι μεταγενέστερα αντίγραφα στα οποία οι αντιγραφείς θα μπορούσαν να είχαν αλλοιώσει τον συμβολισμό. Έτσι, για το 1/3 η λέξη «το τρίτον» μπορούσε να γράφεται ολόκληρη ή συντετμημένη, όπως «το γ^{ov}» ή, ακόμη πιο σύντομα, όπως γ', γ'' ή κάτι παρόμοιο. Συχνά ο παρονομαστής ήταν τοποθετημένος επάνω από τον αριθμητή: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varepsilon}{\gamma}$= 3/5. Κατά τον Vongel, αυτός ο συμβολισμός άρχισε να χρησιμοποιείται ήδη από την εποχή του Αρχιμήδη (3ος αι. π.Χ.) Ένας πάπυρος του 1ου αι. μ.Χ. περιέχει επίσης την αντεστραμμένη μορφή, τον «ινδικό συμβολισμό» $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma}{\varepsilon}$= 3/5, **από τον οποίο προέκυψε ο συμβολισμός των κλασμάτων που χρησιμοποιούμε σήμερα.**

Από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι οι Έλληνες **δεν περιορίστηκαν, σαν τους Αιγυπτίους, στις κλασματικές μονάδες**. Και γιατί να περιορίζονταν; **Δεν ήταν δέσμιοι μιας παγιωμένης παράδοσης.** Είναι αλήθεια ότι συχνά εργάζονταν (ειδικά σε παπύρους της ύστερης εποχής που αντανακλούν έντονες αιγυπτιακές επιδράσεις) με ακολουθίες κλασματικών μονάδων, όπως *2/3+ 1/10 +1/30.* Αλλά μπορούσαν, επίσης, να αντικαθιστούν το άθροισμα αυτό με το *4/5.* Λόγου χάριν, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι η περίμετρος του κύκλου περιέχεται μεταξύ των 310/71 και 31/7 της διάμετροι, ενώ ο σύγχρονος του Ερατοσθένης χρησιμοποιεί το κλάσμα 11/83 να εκφράσει τη λόξωση της εκλειπτικής. [Ο Fowler όμως διαφωνεί (δες το σχετικό αρχείο)]

Πριν από τον Αρχιμήδη, τα κλάσματα απουσίαζαν παντελώς από τα επίσημα ελληνικά μαθηματικά. Αυτό, ωστόσο, δεν σημαίνει ότι ήταν άγνωστα. Μάλλον, ήθελαν να τα αγνοούν. Διότι, σύμφωνα με τον **Πλάτωνα**, η μονάδα ήταν αδιαίρετη και όπως αναφέρει ο ίδιος, «οι δεινοί περί αυτά» ήταν ριζικά αντίθετοι με το να την τέμνουν *(Πολιτεία,* 525Ε). *Τα κλάσματα τα περιφρονούσαν* και η χρήση τους αφηνόταν στους εμπόρους. Όπως έλεγαν, τα ορατά πράγματα είναι διαιρετά αλλά οι μαθηματικές μονάδες όχι. *Αντί να εργάζονται με κλάσματα, εργάζονταν με λόγους ακεραίων. [!!!!!!]*

Παρ' όλα αυτά, ίχνη μιας αρχαίας τεχνικής χειρισμού των κλασμάτων, διασώζονται. Στο έβδομο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που. όπως θα δούμε αργότερα, διαμορφώθηκε πριν από το 400 π.Χ. συναντούμε τους εξής ορισμούς:[13]

Ορ. 3. *Μέρος εστίν αριθμός αριθμού ο έλάσσων του μείζονος, όταν καταμετρή τον μείζονα.*

Ορ. 4. *Μέρη δέ, όταν μη καταμετρή.*

13.Όλες οι παραπομπές στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, τόσο εδώ όσο και στα επόμενα. *θα α*κολουθούν την ελληνική έκδοση που επιμελήθηκε ο Ε. Σ. Σταμάτης (Οργανισμός Εκδόσεων Σχολικών Βιβλίων. 1952-1957).

«Μέρος» σημαίνει στην προκειμένη περίπτωση ν-οστό μέρος, όπου ν είναι ακέραιος. **«Μέρη»** σημαίνει έναν αριθμό νιοστών μερών όπως, για παράδειγμα, τρία πέμπτα. Επομένως οι ορισμοί αυτοί εισάγουν τα τυχόντα κλάσματα.
[Για παράδειγμα ο 5 είναι μέρος του 10 γιατί ο 5 είναι διαιρέτης του 10, ενώ ο 5 είναι μέρη του 12]
Εφαρμογή τους αποτελεί ο ορισμός της αναλογίας.

Ορ. 21. *'Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.* [20]

Ακολουθεί στη συνέχεια η επεξήγηση της αναγωγής των λόγων στους ελάχιστους όρους ή, χρησιμοποιώντας την ορολογία των κλασμάτων, της μετατροπής των κλασμάτων σε ανάγωγα, με διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους. Επιπλέον, στις προτάσεις 34-36 του ίδιου βιβλίου παρατίθενται *οι ιδιότητες του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου*. Η εύρεση του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου έχει σημασία για την αναγωγή των κλασμάτων στον ελάχιστο κοινό παρονομαστή.

Η ορολογία που χρησιμοποιείται στην πυθαγόρεια θεωρία της αρμονίας για τους λόγους μεταξύ αριθμών, μας δίνει την εντύπωση ότι αυτοί οι λόγοι αρχικά ήταν κλάσματα. Ο λόγος 4 : 3, ο οποίος αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα της τετάρτης, ονομαζόταν «επίτριτος», που σημαίνει «ένα τρίτο επιπλέον» (1 1/3*),* ενώ ολόκληρος ο τόνος, στον οποίο αντιστοιχεί ο λόγος 9 : 8 ονομαζόταν «επόγδοος». δηλαδή 1 1/8.

Η αρχαιότερη εμφάνιση των κλασμάτων γίνεται στην *Ιλιάδα* του Ομήρου (8ο αι. π.Χ) (Ραψωδία Κ, 253): «Παρήλθαν δε τα δύο μέρη της νύκτας, υπολείπεται το τρίτο μέρος».

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι Έλληνες γνώριζαν τα κλάσματα ήδη από την απώτατη αρχαιότητα και ότι, τουλάχιστον στον 5ο π.Χ. αιώνα, γνώριζαν άριστα, επίσης, τις πράξεις με αυτά: τη μετατροπή των κλασμάτων σε ανάγωγα, την αναγωγή σε κοινό παρονομαστή, κ.λπ. Γι' αυτούς, επομένως, *σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους*, οι δυσκολίες στον λογισμό με κλάσματα δεν μπορεί να ήταν εμπόδιο στην ανάπτυξη των μαθηματικών.]

- **Πρόβλημα με Σεκέτ Πυραμίδας (Πρόβλημα 56)**

[Problem 56]

Example of reckoning a pyramid (*mr*) whose base-side (*wḫ3-ṯbt*) is 360 [cubits] and whose altitude (*pr-m-wś*) is 250 [cubits]. Cause that I know (i.e., calculate) its seqed (*sḳd*, also transcribed as seked), (i.e., slope[83]). [See Fig. IV.2mm, Plate 78.][84]

Take 1/2 of 360 and the result is 180. Multiply 250 so as to find 180. It makes 1/2 1/5 1/50 of a cubit. A cubit is 7 palms. Multiply 7 as follows:

1	7
1/2	3 1/2
1/5	1 1/3 1/15
1/50	1/10 1/25.

The seqed is 5 1/25 palms.

[Αν μια πυραμίδα έχει ύψος 250 πήχεις και η πλευρά της βάσης της έχει μήκος 360 πήχεις, πόσο είναι το Σεκέτ της;]

[Με σύγχρονα μαθηματικά: Ποια γωνία είναι: αυτή που έχει εφαπτομένη 250:180 = 1,39 δηλαδή η γωνία είναι περίπου 54,5^o. Στην πυραμίδα του Χέοπος η γωνία είναι περίπου 52^o.]

Λύση:

Το μισό της πλευράς της βάσης είναι το μισό του 360 δηλαδή 180. Για να βρούμε το Σεκέτ της πυραμίδας πρέπει να διαιρέσουμε το μισό της πλευράς της βάσης με το ύψος (180: 250): Υπολόγισε από το 250 μέχρι να βρεις 180:

	1	250	
/	1/2	125	(μένουν 55)
/	1/5	50	(μένουν 5)
/	1/50	5	

Άρα το Σεκέτ είναι 1/2 1/5 1/50 πήχεις.

Μετατροπή σε παλάμες. Ένας πήχης έχει 7 παλάμες. Άρα θα πολλαπλασιάσουμε με το 7. (Εφαρμόζει στην ουσία την επιμεριστική ιδιότητα)

1	7	
1/2	3 1/2	
1/5	1 1/3 1/15	(θέλει ξεχωριστό υπολογισμό)*
1/50	1/10 1/25	(θέλει ξεχωριστό υπολογισμό)

Άρα το Σεκέτ είναι 4 1/2 1/3 1/10 1/15 1/25 παλάμες ή
5 και 1/25 παλάμες. [Δεν υπάρχει φανερή εξήγηση για το πώς το υπολόγισαν, σύμφωνα με τον Gillings. Η εικασία που κάνει είναι ότι είχαν κάποιο σημειωματάριο στο οποίο είδαν – για παράδειγμα - ότι 1/10 1/15 = 1/6 και 1/3 1/6 = 1/2]

* 7:5 :	/	1	5	[το 5ο μέρος του 7]
		2/3	3 1/3	
	/	1/3	1 2/3	(γιατί 1/2 1/6 = 2/3)**
	/	1/15	1/3	

** [γενικά: **2:3κ = 1/(2κ) + 1/(6κ).** Για αυτό στον πίνακα 2/η δεν περιλαμβάνονται διαιρέτες που είναι πολλαπλάσια του 3]

[Με τον Φιμπονάτσι:

[Με τον Συλβέστερ:

[Ας λύσουμε καλύτερα για αρχή το παρακάτω – πιο απλό – πρόβλημα]

- **Πρόβλημα 58**

  Σε μια πυραμίδα που το ύψος της είναι 93 1/3 (πήχεις) βρες το Σεκέτ της αν η πλευρά της βάσης της είναι 140 (πήχεις). [Απάντηση: 5 παλάμες και 1 δάκτυλο]

  Λύση: (τι γράφει ο πάπυρος)

Take 1/2 of 140, which is 70. Multiply 93 1/3 so as to get 70. 1/2 of 93 1/3 is 46 2/3. 1/4 of it is 23 1/3. Take 1/2 1/4 of a cubit. Operate on 7: 1/2 of it is 3 1/2; 1/4 of it is 1 1/2 1/4; the total is 5 palms 1 finger. This is the seqed.

Working out:

1	**93 1/3**
\ 1/2	**46 2/3**
\ 1/4	**23 1/3**

Total 1/2 1/4.

Produce 1/2 1/4 of a cubit, the cubit being 7 palms.

1	**7**
1/2	**3 1/2**
1/4	**1 [1/2] 1/4**
Total:	**5 palms 1 finger, which is the seqed.**

Εξήγηση:

Πάρε το μισό του 140 που είναι 70 [το μισό της πλευράς της βάσης].

[Το Σεκέτ θα είναι το πηλίκο του μισού της πλευράς της βάσης δια το ύψος της πυραμίδας, δηλαδή 70: (93 1/3)]

Υπολόγισε με το 93 1/3 μέχρι να βρεις 70.

1	93 1/3	
/ 1/2	46 2/3	(λείπει ακόμα 23 1/3)
/ 1/4	23 1/3	

Σύνολο 1/2 1/4 (του πήχη)

Produce 1/2 1/4 of a cubit, the cubit being 7 palms.

1	7	
1/2	3 1/2	(το μισό του 7)
1/4	1 1/2 1/4	(το τέταρτο του 7)

Σύνολο 5 παλάμες και 1 δάκτυλο που είναι το Σεκέτ.

[Εμείς σήμερα θα λέγαμε 7·1/2 = 7/2 = 7:2. Για του αιγυπτίους δεν ήταν τόσο αυτονόητο. Το 7: 2 ανάγεται στο να λογαριάσεις το 2 μέχρι να φτάσεις στο 7. Κάτι τελείως διαφορετικό από το βρες το 7πλάσιο του μισού. Όσο για το κλάσμα 7/2 δεν είχε νόημα για αυτούς. Φαίνεται όμως (Van Der Waerden σελ. 14) ότι κάποια στιγμή συνειδητοποίησαν ότι το να πολλαπλασιάσει (για παράδειγμα) το 7 με το μισό αρκεί να διαιρέσεις το 7 με το 2. Για την

ακρίβεια οι συνειρμοί αυτοί, σύμφωνα με τους μελετητές, υπάρχουν ενδείξεις ότι τους δημιουργήθηκαν με την ενασχόλησή τους με τον πίνακα 2/η. Αυτό φαίνεται από το ότι τον χρησιμοποιούσαν ώστε να μην γράφουν την ίδια κλασματική μονάδα δύο φορές. Για παράδειγμα αν τους εμφανιζόταν 1/5 + 1/5 έγραφαν το άθροισμα (δηλαδή το γινόμενο 2·1/5 σαν 1/3 και 1/15]

- Σχόλια για το Σεκέτ από το βιβλίο: <u>Van Der Waerden «Η αφύπνιση της επιστήμης»: (σελ. 23)</u>

Από τον υπολογισμό γίνεται φανερό ότι το σέυκετ ή, αλλιώς, η κλίση, *είναι ο α-ριθμός που δηλώνει πόσες παλάμες απέχει το κεκλιμένο επίπεδο από την κατακόρυφο, όταν το ύψος είναι ένα κύβιτο*. Αυτό σημαίνει ότι το σέυκετ ενός κεκλιμένου επιπέδου είναι το ακριβές ανάλογο του πεσού ενός καρβελιού ψωμιού ή μιας στάμνας μπίρας. Η δυσκολία σε όλα αυτά τα προβλήματα δεν έγκειται στη γεωμετρία αλλά στους υπολογισμούς.

<u>- Σχόλια για το Σεκέτ από το βιβλίο «Τριγωνομετρικά λουκούμια» (περίληψη σελίδων 25 – 28:</u>

Στην πραγματικότητα η ποσότητα που υπολόγισε ο Αχμές είναι η συνεφαπτομένη της γωνίας μεταξύ της βάσης της πυραμίδας και της τριγωνικής έδρας της.

Αυτόματα προκύπτουν δύο ερωτήματα:

Πρώτον: <u>Γιατί δεν βρήκε τον αντίστροφο λόγο – δηλαδή την κλίση όπως την ορίζουμε σήμερα;</u>

Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι όταν χτίζουμε μια κατακόρυφη δομή, είναι φυσικό να μετράμε την οριζόντια απόκλιση από την κατακόρυφη γραμμή κάθε φορά που αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ύψος, δηλαδή το αντίστροφο της κλίσης. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στην αρχιτεκτονική, όπου χρησιμοποιείται ο όρος *απομείωση* για την προς τα μέσα κλίση ενός υποθετικά κατακόρυφου τοίχου.

Δεύτερον: <u>Γιατί ο Αχμές πολλαπλασιάζει την λύση επί 7</u>;

Για κάποιο λόγο οι κατασκευαστές των πυραμίδων μετρούσαν τις οριζόντιες αποστάσεις σε παλάμες και τις κατακόρυφες αποστάσεις σε πήχεις. Ένας πήχης ισούται με επτά παλάμες.

Οπότε το ζητούμενο Σεκέτ μας δίνει το αντίστροφο της σημερινής κλίσης σε παλάμες ανά πήχη. Σήμερα φυσικά αυτοί οι λόγοι αντιμετωπίζονται ως καθαροί αριθμοί.

Γιατί αυτός ο λόγος θεωρήθηκε τόσο σπουδαίος ώστε να του αξίζει ειδικό όνομα και να του αφιερώνουν πέντε προβλήματα μέσα στον πάπυρο;

Για τους κατασκευαστές των πυραμίδων ήταν σημαντικό να διατηρούν μια σταθερή κλίση της κάθε έδρας ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Αυτό μπορεί να μοιάζει εύκολο στα χαρτιά, αλλά, μόλις άρχιζε η πραγματική κατασκευή, οι κατασκευαστές έπρεπε απαραιτήτως να ελέγχουν συνεχώς την πρόοδο του έργου για να βεβαιώνονται ότι η κλίση παρέμενε σταθερή, δηλαδή ότι το Σεκέτ ήταν το ίδιο για κάθε μια από τις έδρες.

Φυσικά, θα ήταν αστείο να ισχυρισθεί κανείς ότι οι Αιγύπτιοι ανακάλυψαν την τριγωνομετρία. Πουθενά στα κείμενα τους δεν εμφανίζεται η έννοια της γωνίας, επομένως δεν ήταν σε θέση να διατυπώσουν ποσοτικές σχέσεις μεταξύ γωνιών και πλευρών ενός τριγώνου. Και όμως (για να επικαλεσθούμε τον Chace), «στις αρχές του 18ου αιώνα π.Χ., και πιθανόν 1.000 χρόνια νωρίτερα, όταν χτίζονταν οι μεγάλες πυραμίδες, οι αιγύπτιοι μαθηματικοί είχαν βρει τον τρόπο να συγκρίνουν κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με ένα όμοιο του, του οποίου η μία πλευρά ήταν μοναδιαία και που το χρησιμοποιούσαν ως πρότυπο». Μπορούμε λοιπόν δικαιολογημένα να αποδώσουμε στους Αιγυπτίους κάποιες ακατέργαστες γνώσεις πρακτικής τριγωνομετρίας —ίσως «πρωτοτριγωνομετρία» να είναι σωστότερος όρος—, κάπου 2.000 χρόνια πρίνοι Έλληνες πάρουν το θέμα στα χέρια τους και το μετασχηματίσουν σε πανίσχυρο εργαλείο των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

- **Κατασκευή πυραμίδας με τουβλάκια**

  Θα δώσουμε στα παιδάκια που θα είναι στην λέσχη τουβλάκια για να κατασκευάσουν πυραμίδες. Θα τους ζητήσουμε να φτιάξουν δύο πυραμίδες (στην πραγματικότητα κόλουρες) με την ίδια τετράγωνη βάση που όμως να μην είναι ακριβώς ίδιες. Θα τους δώσουμε μια μεζούρα για να υπολογίσουν το Σεκέτ της πυραμίδας όπως περιγράφεται στο βιβλίο «Αχμές» **σελίδα 181.** Μετά να τους ζητήσουμε να βρουν με πιο Σεκέτ έχτισαν την κάθε πυραμίδα (**σελ. 177).** Κατόπιν μπορούμε να τους ζητήσουμε να υπολογίσουν προσεγγιστικά τον όγκο της (μετρώντας τα τουβλάκια) και έπειτα να τον υπολογίσουν με βάση την **σελίδα 286** του Αχμές. Σε μεγαλύτερους μαθητές νομίζω μπορούμε να μιλήσουμε και για ομοιότητα (το νοητό ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται σε κάθε σκαλοπάτι είναι όμοιο με το τρίγωνο που έχει κάθετη πλευρά το ύψος της πυραμίδας) και φυσικά και για τριγωνομετρία.

- **«Ο (δήθεν) πολλαπλασιασμός του Φιμπονάτσι»**

Τι ξέρουμε για τον Φιμπονάτσι; Καταρχήν τους περίφημους αριθμούς του με τα κουνέλια και ίσως και ότι εισήγαγε τα αραβικά ψηφία στην Ευρώπη. Πως άραγε να έκανε διαίρεση ο Φιμπονάτσι; Στο ιντερνετ μπορείς να βρεις ως «διαίρεση του Φιμπονάτσι» (**<u>Δες και αρχείο</u>** ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ) τον παρακάτω τρόπο: [**Πρώτα να κάνουν οι συμμετέχοντες την διαίρεση 481: 13 με τον Αιγυπτιακό τρόπο**]
«Η Αιγυπτιακή μέθοδος του «διπλασιασμού» για την διαίρεση είναι η βάση της μεθόδου του Φιμπονάτσι για την διαίρεση. Ας δούμε το παράδειγμα της διαίρεσης 481: 13. Η διαίρεση αυτή γίνεται σε δύο στάδια:
Το πρώτο στάδιο:

L	*M*		*R*
1	13	<	481
1	13	<	481
2	26	<	481
3	39	<	481
5	65	<	481
8	104	<	481
13	169	<	481

21	273	<	481
/34	442	<	481
55	715	>	481

----

481 - 442 = 39

Το δεύτερο στάδιο:

L	*M*		*R*
1	13	<	39
1	13	<	39
2	26	<	39
3	39	<	39
5	65	>	39

----

39 - 39 = 0

We can see that the division result is the sum of the marked *L*-numbers, i.e.
34 + 3 = 37.
It seems to be incredible but the algorithms of the Fibonacci multiplication and division following from the Egyptian "doubling" methods were realized in the form of the Fibonacci multiplication and division devices. And then these devices were recognized as the pioneering inventions in USSR and other countries!

Η παραπάνω δραστηριότητα είναι ίσως καλή για να μιλήσουμε με τους μαθητές μας για τους αριθμούς Φιμπονάτσι, αλλά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

΄Το βιβλίο του Φιμπονάτσι είναι ένα βιβλίο περίπου 600 σελίδων. Οι περίφημοι αριθμοί αποτελούν απλώς ένα από τα αναρίθμητα λυμένα παραδείγματα που περιέχει. Σε καμία περίπτωση δεν είναι κεντρικό θέμα του βιβλίου. Το θέμα του βιβλίου είναι να πεισθούν οι Ιταλοί των αρχών του 13ου αιώνα να υιοθετήσουν το αραβικό δεκαδικό αριθμητικό σύστημα. Στην εποχή εκείνη οι αριθμητικές πράξεις γίνονταν με τον άβακα και απλά τα δεδομένα και τα αποτελέσματα γράφονταν με τους ρωμαϊκούς αριθμούς (που ήταν επαρκείς για αυτό τον σκοπό άλλα δεν διευκόλυναν καθόλου τους υπολογισμούς) . Το πλεονέκτημα του αραβικού θεσιακού συστήματος ήταν ότι περιείχε μεθόδους για τις βασικές πράξεις που δεν έχουν ανάγκη τον άβακα (βέβαια έχουν ανάγκη το χαρτί που εκείνη την εποχή ήταν δυσεύρετο.)

Στον Μεσαίωνα στην Ευρώπη αυτές οι καινούργιες αριθμητικές διαδικασίες ονομάζονταν **αλγόριθμοι ,** για να διαχωρίζονται από τους υπολογισμούς με άβακα. Ο Φιμπονάτσι διδάσκει αυτούς τους αλγόριθμους στο βιβλίο του ‘Liber Abaci’. Στην Ιταλία αυτές τις γραπτές διαδικασίες υπολογισμών, της άλγεβρας και γενικά των πρακτικών μαθηματικών τις ονόμαζαν τον Μεσαίωνα ως **«abaco».** Έτσι το “Liber Abaci’’ δεν πρέπει να μεταφράζεται ως «το βιβλίο του άβακα» (αλλά «το βιβλίων των υπολογισμών»)» [O G. Loria στο βιβλίο «Ιστορία των μαθηματικών» τόμος Ι σελίδα 292, αναφέρει: « Ο τίτλος που έδωσε ο Φιμπονάτσι φαίνεται να αποδεικνύει ότι από τον δωδέκατο αιώνα η λέξη «άβακας» είχε χάσει την αρχική της σημασία, δηλαδή «όργανο βοηθητικό για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων» και είχε προσλάβει την έννοια της «αριθμητικής» και συχνά την ακόμα ειδικότερη έννοια της αριθμητικής βασιζόμενη στην χρήση των αραβικών στοιχείων»]

[Γιατί ο Φιμπονάτσι δεν προχώρησε στους δεκαδικούς αριθμούς:

- <u>**Για δραστηριότητα με** τους τύπους του Φιμπονάτσι.</u>

« Ο Φιμπονάτσι στο βιβλίο του Liber Abaci αφιερώνει ένα μέρος του κεφαλαίου 7 για να ασχοληθεί με τις κλασματικές μονάδες. Αναφέρει: « Στο πρώτο και στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου διδαχθήκαμε πώς να προσθέτουμε μαζί κάποια κλάσματα σε ένα μόνο κλάσμα. Σε αυτό το μέρος τώρα μαθαίνουμε πώς να διαχωρίζουμε κλάσματα με κάποια μέρη σε άθροισμα κλασματικών μονάδων και πώς να βλέπουμε τα μέρη κάθε κλάσματος, να ξέρουμε τις τιμές του μέρους ή των μερών ενός ακεραίου. Αυτή η δουλειά είναι πράγματι χωρισμένη σε 7 κατηγορίες».

<u>Η δραστηριότητα θα μπορούσε να γίνει ως εξής</u>:

Κατηγορίες	Κλάσματα	Κανόνας – Τύπος
1η : ο παρανομαστής διαιρείται με τον αριθμητή	3/12, 5/100	Τύπος:
2η : Ο αριθμητής μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα αριθμών που διαιρούν τον παρανομαστή	5/6 = (2 + 3)/6 = 1/3 + 1/2 7/8, τα 5 μέρη του 24.	Τύπος:
3η : Ένα μεγαλύτερο από τον παρανομαστή διαιρείται από τον αριθμητή	2/11 = 1/6 + 1/66 6/11, 5/19	Τύπος:
4η: Ο παρανομαστής είναι πρώτος και αν του προσθέσουμε 1 διαιρείται από τον αριθμητή πλην 1	7/11 = 1/22 + 1/11 + 1/2 6/19, 3/11	(βάση του προηγούμενου κανόνα 3)
5η : Ο παρανομαστής είναι ζυγός και διαιρείται από τον μικρότερο πλην 2.	11/26 = 1/13 + 1/3 + 1/78	(με βάση τον κανόνα 3)
6η : Ο παρανομαστής διαιρείται ακριβώς με το 3 και αν του προσθέσουμε 1 διαιρείται από τον παρανομαστή πλην 1	17/27 = 3/27 + 14/27 = 1/9 + 1/54 + 1/2. 20/33	(1ος και 3ος κανόνας)
7η: Σε κάθε περίπτωση	6/7 – 1/3 = 7/51 3/52 (βγαίνει και με την 2η κατηγορία) 13/20 = 1/2 + 1/7 + 1/140	Γενική μέθοδος (Μέθοδος Φιμπονάτσι – Συλβέστερ) Μπορείτε να δείξετε ότι πάντα η διαδικασία τελειώνει σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων;

[Αν δίναμε την δραστηριότητα σε μικρότερους μαθητές, φυσικά δεν θα ζητούσαμε τους γενικούς τύπους.
Επίσης, θα μπορούσαμε να μη τους καθοδηγήσουμε καθόλου αλλά να τους ζητήσαμε να υπολογίσουν μόνοι τους για παράδειγμα όλα τα κλάσματα από το 1/2, 2/2, 1/3, 2/3, 3/3, 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, …6/9, 7/9, 8/9, 9/9 και να διαπιστώσουν μόνοι τους κανόνες. [Αυτή την δραστηριότητα που περιέγραψα αμέσως πριν την έχω δει σε άρθρο ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών, με ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Βέβαια χρειάζεται περισσότερος χρόνος αλλά τα οφέλη για τους μαθητές θα είναι πιο ουσιαστικά: ανακάλυψη , συνεργατικότητα κ.λ.π]

Για την γενική μέθοδο Φιμπονάτσι – Συλβέστερ:

Πληροφορίες στο Αρχείο Φιμπονάτσι και στο «Οι ιστορικές ρίζες ..» σελίδες 13- 20

- **ΣΤΕΒΙΝ**

΄Το βιβλίο του «Η δεκάτη» εκδόθηκε στα Φλαμανδικά το 1585 και στα Αγγλικά το 1608.

Όπως είδαμε ο Φιμπονάτσι δεν εισήγαγε τους δεκαδικούς αριθμούς. Αυτό έγινε, στην Ευρώπη, πολύ αργότερα, κυρίως, με τον Στέβιν.
Ο John Napier (σκωτσέζος μαθηματικός γνωστός για το βιβλίο του για τους λογαρίθμους, 1550 – 1617) ήταν αυτός που έφερε τους δεκαδικούς αριθμούς σε γενική χρήση. Στο βιβλίο του *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* , 1614 γράφει: « Στους αριθμούς που ξεχωρίζονται από μια **τελεία** στον μέσον τους, οτιδήποτε είναι γραμμένο μετά την τελεία είναι ένα κλάσμα». Ο Νάπιερ ήταν αυτός που, γνωρίζοντας το έργο του Στέβιν, πρότεινε την τελεία για να ξεχωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος. Αντίθετα ο (συνεργάτης του) Briggs στο βιβλίο του «Arithmetica Logarithmica» το 1624, αντί για τελεία έβαζε **κόμμα**.
Ενδιαφέρον έχει και η συμφωνία του **Σαίξπηρ** με τις ιδέες του Στέβιν όπως φαίνεται σε ένα απόσπασμα του έργου του «Έκτωρ και Τρωίλος» του 1609. [δες αρχείο: Η ΤΕΧΝΗ ΤΩΝ ΔΕΚΑΤΩΝ]

Box 6: Shakespeare and De Thiende

William Shakespeare (1564–1616) was a contemporary of Simon Stevin. But what did he know about *De Thiende* and Stevin's contribution to mathematics and technology? Some lines from *Troilus and Cressida* suggest that Shakespeare had come into contact with the English translation of Stevin's work: *DISME: the Art of Tenths, OR; Decimall Arithmetike, Teaching how to performe all Computations whatsoever, by whole Numbers without Fractions, by the foure Principles of Common Arithmeticke: namely, Addition, Subtraction, Multiplication and Division. Invented by the excellent Mathematician, Simon Stevin. Published in English with some additions by Robert Norton, Gent. Imprinted at London by S.S. for Hugh Astley, and are to be sold at his shop at Saint Magnus' corner. 1608.*

Troilus and Cressida is a remarkable play. A manuscript copy of the text was entered in the register of the Stationers Company in 1603. Six years later, in 1609, it was registered for a second time and in that same year a printed quarto edition appeared. Willy Courteaux, an eminent Flemish translator of Shakespeare, suspects that the text registered in 1609 was a reworked version that had been adapted for performance at the Globe on Bankside.

In Act II, scene ii, which is set in a room in Priam's palace in Troy at the time of the Trojan wars, we find the following dialogue (lines 8–26) between Hector and Troilus:

Hector
Though no man lesser fears the Greeks than I
As far as toucheth my particular,
Yet, dread Priam,
There is no lady of more softer bowels,
More spongy to suck in the sense of fear,
More ready to cry out 'Who knows what follows?'
Than Hector is: the wound of peace is surety,
Surety secure; but modest doubt is call'd
The beacon of the wise, the tent that searches
To the bottom of the worst. Let Helen go:
Since the first sword was drawn about this question,
Every **tithe** soul, 'mongst many thousand **dismes** *(δεκάτων)*,
Hath been as dear as Helen; I mean, of ours:
If we have lost so many **tenths** of ours,
To guard a thing not ours nor worth to us,
Had it our name, the value of **one ten**,
What merit's in that reason which denies
The yielding of her up?

[δηλαδή, αν καταλαβαίνω καλά, τα tithe, dismes, tenths, one ten είναι συνώνυμα;]

Troilus
Fie, fie, my brother!
Weigh you the worth and honor of a king
So great as our dread father in a scale
Of common **ounces**? will you with counters sum
The past proportion of his infinite?
And buckle in a waist most fathomless
With **spans** and **inches** so diminutive
As fears and reasons? fie, for godly shame!

In this passage Shakespeare uses the word 'dismes', which Norton employed to translate Stevin's *De Thiende*. In making several references to multiples of 10, he shows that he well understands the intent of Stevin's work. Moreover, he has Troilus speak of ounces and inches, to draw attention to the complicated division of measures of weight and length in the English system – while it is precisely for a 10-part division that Stevin argues in his Appendix.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΣΑΙΞΠΗΡ

ΠΡΙΑΜΟΣ Αφού κάμποσα χάσαμε, ώρες, ζωές και λόγους,
να τι μας λέει πάλι ο Νέστωρ, από τους Έλληνες:
«Δώστε μας την Ελένη κι ότι άλλη ζημιά – τιμή
καιρό, εργασία, έξοδα, πληγές,
φίλους και ότι άλλη αξία εχώνεψε ζεστή
στα σπλάχνα του ο αγιούπας πόλεμος – τα σβήνουμε». –
Έκτορα, εσύ τι λες για αυτό;

ΕΚΤΟΡΑΣ Αν και από με λιγότερο άλλος δεν φοβάται
τους Έλληνες, ωστόσο εγώ σεβάσμιε Πρίαμε,
πιο πρόθυμα και από την πιο τρυφερόπαρδη κυρία,
την πιο σφουγγάρι να ρουφάει το αίσθημα του φόβου,
φωνάζω: «Ποιος γνωρίζει τι έρχεται;»
Το έλκος της ειρήνης είναι η ασφάλεια η σίγουρη
η ασφαλισμένη σιγουριά˙ μα η λίγη αμφιβολία
λέγεται πυροφάνι του σοφού και καθετήρας
που ψάχνει το κακό στον πάτο. Ας πάει η Ελένη.
Από το πρώτο που άστραψε σπαθί για αυτό το ζήτημα
το **δέκατο** κάθε ζωής από την **δεκάτη**
τόσων χιλιάδων ήταν ακριβό σαν την Ελένη –
λέω τους δικούς μας˙ αφού χάθηκαν δικοί μας
τόσα και τόσα **δέκατα**, για να κρατάμε πράμα
που ούτε δικό μας είναι, ούτε έχει αξία,
και αν είχε το όνομά μας όση και ένα **δέκατο** - ,
ποια έχει αξία αυτός ο λόγος που επιμένει
να μην την παραδώσουμε;

ΤΡΩΙΛΟΣ Ντροπή, ντροπή αδελφέ μου!
Ζυγιάζεις την αξία και την ντροπή ενός βασιλιά,
μεγάλου σαν τον σεβαστό πατέρα μας, με ζύγια
κοινά; Θέλεις με **νόμισμα τρεχούμενο**
να λογαριάσεις το υπερδιάστατο του απείρου του;
Να ζώσεις μέση που έξω είναι από κάθε μέτρο;
με **πιθαμές** και **πόντους**, τόσο μειωτικά,
όπως οι φόβοι και οι ορθολογισμοί; Ντροπή προς θεού!

[Η γνώμη μου: το κείμενο, κατά την γνώμη μου, είναι εκπληκτικό από πολλές απόψεις. Ιδιαίτερα ως προς το μαθηματικό του περιεχόμενο, νομίζω ότι η ελληνική μετάφραση, αναγκαστικά, αφαιρεί μέρος από τον ιδιοφυή χειρισμό του Σαίξπηρ, ενώ αντίθετα η γνώση της εποχής (για το έργο του Στέβιν, για παράδειγμα) μας βοηθάει να καταλάβουμε πολύ περισσότερο το πνεύμα του. (Ένας (ή μία) φιλόλογος θα μπορούσε να μας βοηθήσει περισσότερο)]

ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΑΔΑ
ΘΑΛΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΙ
ΝΑΟΥΣΑ 2010
ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΧΜΕΣ
Σωτήρης Συριόπουλος