Η συντομογραφία της άλγεβρας

Ο μαθητής της μέσης εκπαίδευσης διαπιστώνει ότι αντίθετα από τη γεωμετρία, η άλγεβρα είναι ένα πεδίο μαθηματικής μελέτης με πολλούς συμβολισμούς. Τα κείμενα είναι γεμάτα με σημεία πρόσθεσης και αφαίρεσης, σύμβολα διαίρεσης, τα τελευταία γράμματα της αλφαβήτου για άγνωστες ποσότητες και τα πρώτα για σταθερές, διάφορα σύμβολα ομαδοποίησης (παρενθέσεις, αγκύλες), εκθέτες, δείκτες, ριζικά, σύμβολα ισότητας και παραγοντικού, σύμβολα συνδυασμών και μεταθέσεων, λογαριθμικό συμβολισμό και άλλα. Σπάνια ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι όλος αυτός ο συμβολισμός έχει ηλικία λίγο μεγαλύτερη από 400 χρόνια. Πράγματι, τα περισσότερα απ' αυτά τα σύμβολα έχουν ηλικία πολύ μικρότερη από 400 χρόνια.

Ο Τζ. Χ. Φ. Νέσσελμαν (G.H.F. Nesselmann), στα 1842, διέκρινε πρώτος τρία στάδια στην ιστορική εξέλιξη του αλγεβρικού συμβολισμού. Στην αρχή υπήρχε η ρητορική άλγεβρα, στην οποία οι λύσεις των προβλημάτων γράφονταν χωρίς συντομογραφίες ή συμβολισμούς, με καθαρή επιχειρηματολογία σε πεζό λόγο. Μετά ακολούθησε η συγκεκομμένη άλγεβρα, στην οποία υιοθετήθηκαν στενογραφικές συντομογραφίες για κάποιες από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ποσότητες, σχέσεις και πράξεις. Τέλος, στο τελευταίο στάδιο έχουμε τη συμβολική άλγεβρα, στην οποία οι λύσεις των προβλημάτων εμφανίζονται σε μεγάλο βαθμό με μαθηματικό συμβολισμό, με χρήση συμβόλων που έχουν πολύ λίγη προφανή σύνδεση με τις οντότητες και τις ιδέες που παριστάνουν.

Είναι μάλλον σωστό να διατυπώσουμε την άποψη ότι η άλγεβρα πριν από την εποχή του αλεξανδρινού Διόφαντου (3ος αιώνας) ήταν ρητορική. Μια από τις πιο σημαντικές συνεισφορές του Διόφαντου στην ανάπτυξη της άλγεβρας ήταν οι συντομογραφίες που εισήγαγε στην ελληνική άλγεβρα. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι η ρητορική άλγεβρα εξακολούθησε να υπάρχει στον υπόλοιπο κόσμο, με εξαίρεση όπως θα δούμε τις Ινδίες, για πολλές εκατοντάδες χρόνια. Ειδικά στη Δυτική Ευρώπη η άλγεβρα παρέμεινε κυρίως ρητορική μέχρι το 15ο αιώνα, όταν άρχισαν να εμφανίζονται κάποια ανομοιογενή δείγματα συντομογραφιών. Η συμβολική άλγεβρα έκανε την πρώτη της εμφάνιση στη Δυτική Ευρώπη το 16ο αιώνα, αλλά η ανάπτυξη της ήταν τόσο αργή, που περίπου ως τα μέσα του 17ου αιώνα δεν εξαπλώθηκε.

Η καλύτερη ίσως πηγή προβλημάτων άλγεβρας της ελληνικής αρχαιότητας είναι μια συλλογή, γνωστή ως Παλατινή, ή Ελληνική, Ανθολογία, που περιέχει και μια ομάδα 46 αριθμητικών προβλημάτων διατυπωμένων με επιγραμματική μορφή και είχαν συγκεντρωθεί από το γραμματικός Μητρόδωρο. Μερικά από αυτά τα προβλήματα είναι πιθανό να επινοήθηκαν από τον ίδιο το συγγραφέα, έχουμε όμως κάθε λόγο να πιστεύουμε ότι τα περισσότερα από αυτά διατυπώθηκαν πολύ πιο παλιά. Τα προβλήματα, που προφανώς αποσκοπούσαν στην πνευματική ψυχαγωγία, ανήκουν σε έναν τύπο προβλημάτων που μνημόνευσε ο Πλάτωνας (περίπου 400 π. Χ.) και μοιάζουν πολύ με κάποια από τα προβλήματα που βρέθηκαν στον πάπυρο του Ρίντ (περίπου 1650 π. Χ.). Τα μισά προβλήματα καταλήγουν σε απλές γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο, περίπου δώδεκα σε εύκολα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, ένα σε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους, ένα σε τέσσερις γραμμικές εξισώσεις με τέσσερις αγνώστους και υπάρχουν και δύο περιπτώσεις απροσδιόριστων γραμμικών εξισώσεων. Πολλά προβλήματα μοιάζουν με τα προβλήματα που βρίσκουμε στα σύγχρονα βιβλία αριθμητικής και τις χαρακτηριστικές ονομασίες, προβλήματα «διανομής», «εργασίας», προβλήματα με «δεξαμενές», προβλήματα «ανάμιξης», «ηλικίας» και άλλα. Αν και τα προβλήματα αυτά παρουσιάζουν ελάχιστη δυσκολία όταν αντιμετωπίζονται με το σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, πρέπει να παραδεχτούμε ότι για να δώσουμε ρητορικές λύσεις χρειάζεται να επιτύχουμε μεγάλη πνευματική προσήλωση. Όποιος δεν το πιστεύει, ας δοκιμάσει τις ικανότητες του δίνοντας καθαρά ρητορικές λύσεις στα παρακάτω παραδείγματα που επιλέξαμε τυχαία από την Παλατινή Ανθολογία:

1. [πρόβλημα «διανομής»] Πόσα μήλα χρειάζονται, αν από έξι άτομα τα τέσσερα παίρνουν το ένα τρίτο, ένα όγδοο, ένα τέταρτο, και ένα πέμπτο του συνολικού αριθμού αντίστοιχα, το πέμπτο άτομο παίρνει δέκα μήλα και μένει ένα μήλο για το έκτο;

2. [πρόβλημα «ηλικίας»] ο Δημοχάρης έχει ζήσει ένα τέταρτο της ζωής του σαν αγόρι, ένα πέμπτο σαν νέος, ένα τρίτο σαν άνδρας και έχει μπει εδώ και 13 χρόνια στη γεροντική ηλικία. Πόσων χρονών είναι;

3. [πρόβλημα «εργασίας»] Μάστορα, βιάζομαι να χτίσω αυτό το σπίτι. Σήμερα ο καιρός είναι καλός και δε χρειάζομαι πολύ περισσότερα τούβλα απ' αυτά που έχω — χρειάζομαι μόνο τριακόσια. Εσύ μόνος σου θα μπορούσες να χτίσεις αυτά σε μια μέρα, αλλά ο γιος σου σταμάτησε στα διακόσια και ο γαμπρός σου στα διακόσια πενήντα. Δουλεύοντας όλοι μαζί σε πόσες μέρες θα τελειώσετε;

4. [πρόβλημα με «δεξαμενές»] Είμαι ένα μπρούντζινο λιοντάρι, οι πίδακες μου είναι τα δύο μου μάτια, το στόμα μου και το κάτω μέρος του δεξιού μου ποδιού. Το δεξί μου μάτι γεμίζει ένα πιθάρι σε δύο μέρες (1 μέρα = 12 ώρες), το αριστερό σε τρεις και το πόδι μου σε τέσσερις. Το στόμα μου το γεμίζει σε έξι ώρες. Πες μου πόσο χρειάζονται να το γεμίσουν όλα μαζί.

5. [πρόβλημα «ανάμιξης»] Κατασκεύασε ένα στέμμα από χρυσάφι, χαλκό, κασσίτερο και σίδηρο που να ζυγίζει 60 μνες: ο χρυσός και ο χαλκός να είναι τα δύο τρίτα αυτού ο χρυσός και ο κασσίτερος τα τρία τέταρτα και ο χρυσός και ο σίδηρος τα τρία πέμπτα. Βρες τα βάρη του χρυσού, του χαλκού, του κασσίτερου και του σιδήρου που χρειάζονται.

Η γέννηση των *Αριθμητικών του Διόφαντου* δικαιούται να καταγραφεί ως μια **μεγάλη στιγμή των μαθηματικών**, όχι μόνο, όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, για το σημαντικό μαθηματικό του περιεχόμενο που άσκησε μεγάλη επιρροή, αλλά επίσης γιατί, όπως θα δείξουμε τώρα, σ' αυτή την εργασία βρίσκουμε τα πρώτα βήματα που έγιναν στον αλγεβρικό συμβολισμό. Τα βήματα αυτά είχαν τη μορφή στενογραφικών συντομογραφιών.

Στα Αριθμητικά βρίσκουμε συντομογραφίες για τον άγνωστο, δυνάμεις του αγνώστου μέχρι την έκτη, για την αφαίρεση, την ισότητα και τον αντίστροφο. Η λέξη μας «αριθμητική» είναι παράγωγο της λέξης αριθμός που συνόδευε το ουσιαστικό τέχνη («επιστήμη»). 0 Τ.Λ. Χηθ (T.L. Heath) έχει αποδείξει μάλλον πειστικά ότι το σύμβολο που χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος για τον άγνωστο πιθανό να προέρχεται από τη συγχώνευση των δύο πρώτων γραμμάτων α και ρ της λέξης αριθμός. Με τον καιρό, έφτασε να μοιάζει με το ελληνικό τελικό σίγμα ς. Αλλά ενώ αυτό αποτελεί μια εικασία, δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία για το νόημα του συμβολισμού των δυνάμεων του αγνώστου. Έτσι, ο «άγνωστος στο τετράγωνο» συμβολίζεται με το Δ^{Y}, τα δύο πρώτα γράμματα της ελληνικής λέξης ΔΥΝΑΜΙΣ. Επίσης, ο «άγνωστος στον κύβο» συμβολίζεται με K^{Y}, τα πρώτα δύο γράμματα της ελληνικής λέξης ΚΥΒΟΣ. Με τον ίδιο τρόπο εξηγούνται εύκολα οι επόμενες δυνάμεις του αγνώστου — $\Delta^{Y}\Delta$ (δυναμοδύναμις), ΔK^{Y} (δυναμόκυβος) και $K^{Y}K$ (κυβόκυβος). Το σύμβολο του Διόφαντου για το «πλην» μοιάζει με Λ στο οποίο έχει σχεδιαστεί η διχοτόμος. Αυτό έχει εξηγηθεί ως η σύνθεση των γραμμάτων Λ και Ι, από την ελληνική λέξη ΛΕΙΨΙΣ (έλλειψη). Η πρόθεση δηλώνεται με απλή παράθεση και όλοι οι αρνητικοί όροι σε μια έκφραση συγκεντρώνονται μαζί και έπονται του αρνητικού συμβόλου. Ο αριθμητικός συντελεστής μιας δύναμης του αγνώστου παριστάνεται με το κατάλληλο ελληνικό αλφαβητικό στοιχείο και μπαίνει μετά το σύμβολο της δύναμης. Αν υπάρχει κάποιος σταθερός όρος, τότε χρησιμοποιείται το $\overset{0}{M}$, από την ελληνική λέξη ΜΟΝΑΔΕΣ, μαζί με τον κατάλληλο αριθμητικό συντελεστή. Τα αλφαβητικά ελληνικά νούμερα είναι:

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ ή ϝ (στίγμα)	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ(κόππα)	900	ϡ (σαμπί)

Έτσι για παράδειγμα έχουμε

13 = ιγ , 31= λα , 743 = ψμβ

Για μεγαλύτερους αριθμούς χρησιμοποιούσαν γραμμές ή τόνους. Τα σύμβολα για το στίγμα, το κάππα και το σαμπί φαίνονται στο σχήμα 1.

σχήμα 1

Με τα ψηφία και' τις στενογραφικές συντομογραφίες που είδαμε πιο πάνω, οι εκφράσεις:

x^3+13x^2+8x και $\chi^3-8\chi^2+2\chi-3$ θα γράφονταν:

$K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\iota\gamma\varsigma\eta$ και $K^{Y}\alpha\varsigma\beta\Lambda\Delta^{Y}\eta\overset{0}{M}\gamma$,

που με λόγια διαβάζονται:

άγνωστος στον κύβο 1, άγνωστος στο τετράγωνο 13, άγνωστος 8 και (άγνωστος στον κύβο 1, άγνωστος 2) πλην (άγνωστος στο τετράγωνο 8, μονάδες 3).

Όπως αναφέραμε πιο πάνω σ' αυτή τη διάλεξη, οι Ινδοί εισήγαγαν επίσης συντομογραφίες στην άλγεβρα. Την πρόσθεση την δήλωναν, όπως και ο Διόφαντος, με παράθεση, την αφαίρεση βάζοντας μια τελεία πάνω από τον αφαιρέτη, τον πολλαπλασιασμό γράφοντας bha (την πρώτη συλλαβή της λέξης bhavita: «γινόμενο»), με τους παράγοντες του πολλαπλασιασμού, τη διαίρεση γράφοντας το διαιρέτη κάτω από το διαιρετέο, την τετραγωνική ρίζα γράφοντας ka (από τη λέξη karana: «άρρητος») πριν από την ποσότητα. Ο Βραχμαγκούπτα (7ος αι.) δήλωνε τον άγνωστο με $y\bar{a}$ (από τη λέξη yavattavat: «όσο»). Οι σταθεροί ακέραιοι έπαιρναν σαν πρόθεμα το $r\bar{u}$ (από το rupa: «ο απόλυτος αριθμός»). Οι επιπλέον άγνωστοι συμβολίζονταν με τις πρώτες συλλαβές λέξεων από χρώματα. Έτσι ο δεύτερος άγνωστος μπορεί να γραφόταν $k\bar{a}$ (από τη λέξη $k\bar{a}$laka: «μαύρο») και η έκφραση

$8xy + \sqrt{10} - 7$ θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$y\bar{a}\ k\bar{a}$ 8 bha ka 10 $r\bar{u}$ 7.

Κάποιοι Ιταλοί μαθηματικοί στα τέλη του 15ου και στις αρχές του 16ου αιώνα εισήγαγαν στοιχεία συντομογραφιών στην άλγεβρα τους. Για παράδειγμα, ο Λουκά Πατσιόλι (Luca Pacioli, περ. 1445-περ. 1509) στο βιβλίο του *Summa de arithmetics* στα 1494 χρησιμοποιούσε το p (από το *piu*, «περισσότερο») για το συν, το m (από το *meno*, «λιγότερο») για το πλην, το co (από το cosa, «πράγμα») για τον άγνωστο χ, το ce (από το censo) για το x^2 , το cu (από το *cuba*) για το χ^3 και το cece (από το censocenso) για το χ^4 . Η ισότητα δηλωνόταν πολλές φορές με το ae (από το aeqnalis).

Η εποχή είχε πια ωριμάσει για την άλγεβρα να περάσει στο συμβολικό της στάδιο. Έτσι ο Ρόμπερτ Ρέκορντ (Robert Recorde, περ. 1510-1558) μας έδωσε στα 1557, στο έργο του The Whetstone of Witte, το σημερινό σύμβολο ισότητας (=). Ο Ρέκορντ υιοθέτησε το ζευγάρι αυτό των ίσων και παράλληλων γραμμών για το σύμβολο της ισότητας «διότι δεν υπάρχουν 2 άλλα πράγματα που να είναι περισσότερο ίσα». Το σύμβολο της ρίζας ($\sqrt{\ }$) το εισήγαγε ο Κ. Ρούντολφ (Christoff Rudolff) στα 1526 στο βιβλίο του για την άλγεβρα με τίτλο *Die Coss*, επειδή μοιάζει με το μικρό r από τη λέξη *radix* (ριζικό).

Η πρώτη φορά που εμφανίστηκαν τυπωμένα τα σύγχρονα σύμβολα + και - ήταν σε μια αριθμητική που εκδόθηκε στη Λιψία στα 1489 από τον Τζ. Ουίντμαν (Johann Widman, γεννήθηκε στα 1460 περ. στη Βοημία). Τα σύμβολα εκεί δε χρησιμοποιούνται ως σύμβολα πράξεων, αλλά απλά για να δείξουν περίσσεια και έλλειψη. Είναι πολύ πιθανό το σύμβολο του συν να είναι μια σύνθεση της λατινικής λέξης *et* που χρησιμοποιούνταν συχνά για να δηλώσει πρόσθεση, και το σύμβολο του πλην ν' αποτελεί τη συντομογραφία $\bar{m}$ του *minus* (πλην). Υπάρχουν και άλλες πειστικές ερμηνείες της προέλευσης των συμβόλων αυτών. Τα σύμβολα + και - χρησιμοποιήθηκαν ως σύμβολα αλγεβρικών πράξεων στα 1514 από τον Ολλανδό μαθηματικό Βάντερ Χοέκε (Vander Hoecke), είναι όμως πιθανό να είχαν χρησιμοποιηθεί και νωρίτερα. Στα 1572, ο Ραφαέλ Μπομπέλι (Rafael Bombelli, περ. 1526-1573) εκτύπωσε ένα βιβλίο άλγεβρας με πιο εξελιγμένο αλγεβρικό συμβολισμό. Για παράδειγμα, η σύνθετη έκφραση $\sqrt{7+\sqrt{14}}$, που ο Πατσιόλι θα την έγραφε ως RV 7p R14, όπου το RV, η *καθολική ρίζα* (radix universalis), δηλώνει ότι η τετραγωνική ρίζα περιλαμβάνει όλη την έκφραση που ακολουθεί, ο Μπομπέλι θα την έγραφε ως R[7p R14]. O Μπομπέλι διέκρινε τις τετραγωνικές από τις κυβικές ρίζες γράφοντας R_q και Rc αντίστοιχα. Ο Φρανσουά Βιέτ (Francois Viete, 1540-1603), ο μεγαλύτερος Γάλλος μαθηματικός του 16ου αιώνα, πρόσφερε πάρα πολλά στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συμβολισμού. Χρησιμοποιούσε φωνήεντα' για να παριστάνει τις άγνωστες ποσότητες και σύμφωνα για τις γνωστές. Ο Καρτέσιος (1596-1650) ήταν αυτός που εισήγαγε στα 1637, τη συνήθεια που έχουμε και σήμερα να χρησιμοποιούμε τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου για τους αγνώστους και τα πρώτα για τους γνωστούς. Πριν από τον Βιέτ, ήταν κοινή πρακτική να χρησιμοποιούνται διαφορετικά γράμματα ή σύμβολα για τις διαφορετικές δυνάμεις μιας ποσότητας. Ο Βιέτ χρησιμοποιούσε το ίδιο γράμμα με κατάλληλο χαρακτηρισμό. Έτσι τα δικά μας χ, χ^2 , χ^3 ο Βιέττα έγραφε ως Α, Α *quadratum*, A *cubum*, και μεταγενέστεροι συγγραφείς έγραφαν πιο σύντομα A, Aq, Ac. O Καρτέσιος ήταν αυτός που εισήγαγε επίσης το σημερινό σύστημα των εκθετών: χ, χ^2, χ^3 κ.ο.κ. Ο Τόμας Χάρριοτ (Thomas Harriot, 1560-1621) μας έδωσε στο έργο του Artis analytical praxis, που εκδόθηκε στα 1631 μετά το θάνατο του, τα σημερινά σύμβολα ανισότητας, > και <. Ο Γουίλλιαμ Ότρεντ (William Oughtred, 1572-1660) έδωσε μεγάλη έμφαση στα μαθηματικά σύμβολα, και εισήγαγε πάνω από 150, από τα οποία έχουν διασωθεί μόνο τρία: το x του πολλαπλασιασμού, οι τέσσερις τελείες :: που χρησιμοποιούνται στις αναλογίες και το σύμβολο ~ που χρησιμοποιούμε συχνά για τη διαφορά.

Στον Όυλερ (1707-1783) οφείλουμε την καθιέρωση του συμβολισμού f(x) για τις συναρτήσεις, του e για τη βάση των φυσικών λογαρίθμων, του Σ για το άθροισμα στις σειρές και του i για τη φανταστική μονάδα $\sqrt{-1}$. Το σύμβολο ν! που ονομάζεται παραγοντικό του ν, το εισήγαγε στα 1808 ο Κρίστιαν Κράμπ (Christian Kramp, 1760-1826) από το Στρασβούργο, ο Κράμπ διάλεξε αυτό το σύμβολο για να αποφύγει τις δυσκολίες που παρουσίαζε η εκτύπωση του προηγούμενου συμβόλου ν . Ο Τζων Ουόλις (John Wal-lis, 1616-1703) ήταν ο πρώτος που εξήγησε ολοκληρωμένα τη σημασία του μηδενικού, του αρνητικού και του κλασματικού εκθέτη και εισήγαγε το σημερινό σύμβολο (∞) για το άπειρο. Το σύμβολο π χρησιμοποιήθηκε από τους πρώτους Άγγλους μαθηματικούς Ότρεντ, Ισαάκ Μπάρροου (Isaac Barrow, 1661-1708) για να παριστάνει την περίμετρο ή την περιφέρεια κύκλου. Ο πρώτος που χρησιμοποίησε αυτό το σύμβολο για το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο ήταν ο Άγγλος συγγραφέας Γουίλλιαμ Τζόουνς (William Jones, 1675-1749) σε μια δημοσίευση στα 1706. Το σύμβολο αυτό όμως δε χρησιμοποιούνταν με αυτή την έννοια μέχρι που το υιοθέτησε ο Όυλερ στα 1737.

Ασκήσεις

12.1 Ο Θυμαρίδας, ένας λιγότερο σημαντικός μαθηματικός του 4ου αιώνα π. Χ., μας έθωσε τον παρακάτω κανόνα για την επίλυση ενός ορισμένου συνόλου ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους. Ο κανόνας έγινε τόσο πολύ γνωστός ώστε πήρε τον τίτλο το επάνθημα του Θυμαρίδα: Αν δίνονται το άθροισμα ν ποσοτήτων και το άθροισμα κάθε ζεύγους που περιέχει μια από αυτές τις ποσότητες, τότε αυτή η ποσότητα είναι ίση με το 1/(ν-2) της διαφοράς ανάμεσα στα αθροίσματα αυτών των ζευγών και του πρώτου αθροίσματος.

(α) Αποδείξτε αυτό τον κανόνα.

(β) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 5 του κειμένου είναι ένα αριθμητικό παράδειγμα του άνθους του Θυμαρίδα.

12.2 Το παρακάτω πρόβλημα από την Παλατινή Ανθολογία φιλοδοξεί να δώσει συνοπτικά την προσωπική ζωή του Διόφαντου «Ο Διόφαντος έζησε το ένα έκτο της ζωής του σαν παιδί, το ένα δωδέκατο σαν νέος και ένα έβδομο παραπάνω σαν εργένης. Πέντε χρόνια μετά το γάμο του γεννήθηκε ένας γιος που πέθανε πέντε χρόνια πριν τον πατέρα του, σε ηλικία ίση με το μισό της [τελικής] ηλικίας του πατέρα του. Αν υποθέσουμε ότι οι λεπτομέρειες του προβλήματος είναι σωστές, πόσων χρονών ήταν ο Διόφαντος όταν πέθανε;

12.3 (α) Στο ελληνικό αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα οι αριθμοί 1.000, 2.000,..., 9.000 γράφονταν όπως και τα σύμβολα των 1, 2,... 9, αλλά με τόνο. Έτσι το 1.000 γραφόταν ως α'.

Ο αριθμός 10.000, η μυριάδα, γραφόταν ως Μ. Για τα πολλαπλάσια του 10.000 χρησιμοποιούσαν την πολλαπλασιαστική αρχή. Έτσι οι αριθμοί 20.000, 300.000, 4.000.000 γράφονταν ως βΜ, λΜ και υΜ. Γράψτε στο ελληνικά σύστημα τους αριθμούς 5.780, 72.803, 450.082, 3.257.888.

(β) Συμπληρώστε έναν πίνακα πρόσθεσης μέχρι το 10+10 και έναν πίνακα πολλαπλασιασμού μέχρι το 10· για το ελληνικό αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα.

Σχετική Βιβλιογραφία

1. Cajori Florian, A History of Mathematical Notations, 2 τομ. Chicago: Open Court, 1928-1929.
2. Heath T.L. Diophantus of Alexandria, New York: Cambridge University Press, 1910.