ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΕΣΟΥ

[ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ: ΤΟΥ **GILLINGS R**. 1971

Mathematics
in the Time
of the Pharaohs]

Το πεσού είναι ένα μέτρο της πυκνότητας της μπύρας ή του ψωμιού, αφού έχουν ήδη παρασκευαστεί. Δεν είναι ένα μέτρο της ποιότητας του κριθαριού, του σιταριού, του wedyet flour (αλευριού), emmer, κ.λ.π που έχουν χρησιμοποιηθεί για να φτιάξουν την μπύρα ή το ψωμί, παρόλο που φυσικά όλα αυτά τα είδη μπορούν να ποικίλουν σε ποιότητα και πυκνότητα.
Το πεσού της μπύρας ή του ψωμιού καθορίζεται από τους Αιγυπτίους έτσι:
Εάν ένα χεκάτ σπυριών σιταριού (4,75 λίτρα) χρησιμοποιηθεί για να παράξει μόνο ένα καρβέλι ψωμί ή μια κούπα μπύρα, τότε το πεσού και των δυο είναι 1. Ομοίως εάν ένα χεκάτ σπυριών σιταριού χρησιμοποιηθεί για να παράξει δύο καρβέλια ψωμί ή δύο κούπες μπύρα, τότε το πεσού και των δυο είναι 2, κ.ο.κ. Έτσι όσο μεγαλύτερο είναι το πεσού τόσο πιο αραιή θα είναι η μπύρα ή το ψωμί και πιθανότατα τόσο μικρότερο το καρβέλι.
Η σχέση μεταξύ της ποσότητας του καρβελιού που χρησιμοποιήθηκε και του πεσού της μπύρας ή του ψωμιού που παράχθηκε έχει ως εξής:

$$\text{pesu} = \frac{\text{number of loaves or jugs}}{\text{number of hekats of grain}}.$$

(αριθμός καρβελιών ή ποτηριών προς αριθμό των χεκάτ σπυριών σιταριού = πεσού μπύρας ή ψωμιού)

Γενικά μιλώντας όταν οι Αιγύπτιοι έφτιαχναν μπύρα και ψωμί, χρησιμοποιούσαν πιο πολλά σπυριά σιταριού για την μπύρα τους παρά για το ψωμί, ή θα μπορούσαμε να πούμε, πως η ίδια ποσότητα σιταριού θα παρήγαγε πιο πολλά καρβέλια από ποτήρια μπυρών τα οποία συνεπώς ήταν σχετικά πιο πυκνά.
Στα 20 προβλήματα πεσού των πάπυρων Ριντ και Μόσχας (10 στον καθένα) οι τιμές των πεσού της μπύρας βρίσκονται ανάμεσα στο 1 και στο 4 ενώ για τα καρβέλια ψωμιού τα πεσού ποικίλουν από το 5 έως και το 45.
Το πρώτο από τα 10 προβλήματα πεσού του πάπυρου Ριντ είναι το **πρόβλημα 69**:

$3\ \overline{2}$ hekats of meal are made into 80 loaves. Find the amount of meal in each loaf and the pesu.

(3,5 χεκάτ σιταριού γίνονται 80 καρβέλια. Βρες την ποσότητα του σιταριού σε κάθε καρβέλι και το πεσού)

Αφού υπάρχουν 320 ρο σε κάθε χεκάτ, ο γραφέας βρήκε πρώτα το νούμερο των ρο σε $3\ \overline{2}$ χεκάτ. ($320 \cdot 3\ \overline{2}$)

\1	320/
\2	640/
\\$\bar{2}$	160/
Totals 3 $\bar{2}$	1120 ro.

Μετά διαίρεσε τα 1120 ρο με τα 80 καρβέλια και έγραψε:

Πρόσθεσε με το 80 μέχρι να βρεις 1120. [δηλαδή 1120:80]

1	80
\10	\800
2	160
\ 4	\320
Totals 14	1120.

Η απάντηση είναι 14 ρο σε κάθε καρβέλι ή $\overline{32}$ του χεκάτ και 4 ρο.

Για να βρει το πεσού του κάθε καρβελιού το μόνο που χρειαζόταν ήταν να διαιρέσει το 80 με το 3 $\bar{2}$ και έγραψε:

Πρόσθεσε με το 3 $\bar{2}$ μέχρι να βρεις 80

1	3 $\bar{2}$
10	35
\20	70 /
\ 2	7 /
\ $\bar{\bar{3}}$	2 $\bar{3}$/
\\$\overline{21}$	$\bar{6}$/
\ $\bar{7}$	$\bar{2}$/
Totals 22 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{7}$ $\overline{21}$	80.

The pesu is 22 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{7}$ $\overline{21}$.

[Πως βρίσκει το ότι το $\bar{\bar{3}}$ είναι 2 $\bar{3}$: Κάθε αριθμός της αριστερής στήλης αναφέρεται σε κάποιο πολλαπλάσιο ή υποδιαίρεση του αριθμού που είναι πάνω δεξιά από αυτόν. Για παράδειγμα το 10 αναφέρεται στο 10πλάσιο του 3 $\overline{2}$ που είναι 35, το 20 αναφέρεται στο διπλάσιο του 35, δηλαδή 70 και το 2 αναφέρεται στο 1/10 του 70, που είναι 7. Επομένως το $\overline{\overline{3}}$ (τα 2/3) (που είναι το 1/3 του 2) αναφέρεται στο 1/3 του 7 που είναι 2 $\overline{3}$]

[Για το $\overline{21}$: Ομοίως σκεπτόμενοι, το $\overline{21}$ αναφέρεται στο 1/14 του $\overline{\overline{3}}$ γιατί (2 + 1/3): 14 = 1/6.]

[Αλλά πως σκέφτηκαν να πάρουν το $\overline{21}$;

Μέχρι στιγμής έχουν βρει 79 και $\overline{3}$, οπότε απομένουν $\overline{\overline{3}}$ μέχρι το 80. Αλλά ξέρουν ότι $\overline{\overline{3}}$ = $\overline{2}$ $\overline{6}$. Έτσι θέλουν να βρουν το $\overline{6}$ και το $\overline{2}$ του 3 $\overline{2}$.

Οπότε σκέφτεται: τι σχέση έχει το $\overline{6}$ με το 2 $\overline{3}$ που βρίσκεται πάνω δεξιά; Το $\overline{6}$ είναι το 1/2 του $\overline{3}$ και το 1/12 του 2. Αλλά 2 + 12 = 14. Επομένως 2/3 δια 14 κάνει 21.]

Τα προβλήματα 70 και 71 είναι σαν το πρόβλημα 69 αλλά τα επόμενα 7 (προβλήματα 72 – 78) διαπραγματεύονται με ανταλλαγές καρβελιών και μπύρας.

<u>Το πρόβλημα 73</u> είναι:
100 καρβέλια πεσού 10 ανταλλάσσονται με καρβέλια πεσού 15. Πόσα τέτοια καρβέλια θα είναι;

Ο γραφέας έγραψε: υπολόγισε την ποσότητα αλευριού στα 100 καρβέλια: 100:10 = 10 χεκάτ. Άρα ο αριθμός καρβελιών πεσού 15 από τα χεκάτ είναι 15 φορές 10 δηλαδή 150. Αυτό είναι το νούμερο των καρβελιών για την ανταλλαγή.

The other six problems on the exchange of loaves and beer of different pesus appear at first glance to be similar to Problem 73, but a closer examination reveals some new scribal techniques and arithmetical procedures. We look then at Problems 74 and 76.

το πρόβλημα 74 : 1000 καρβέλια πεσού 5 ανταλλάσσονται ως εξής: τα μισά με καρβέλια πεσού 10 και τα άλλα μισά με καρβέλια πεσού 20. Πόσα καρβέλια από το καθένα θα είναι;

Το πρόβλημα 76: 1000 καρβέλια πεσού 10 θα ανταλλαχθούν με καρβέλια πεσού 20 και το ίδιο νούμερο καρβελιών με πεσού 30. Πόσα από κάθε είδος θα είναι;

<u>Λύση προβλήματος 74</u>:
Τα 1000 καρβέλια πεσού 5 έχουν 200 χεκάτ. Και το μισό του 200 είναι 100.
100 επί 10 = 1000 καρβέλια πεσού 10.
100 επί 20 = 2000 καρβέλια πεσού 20. Αυτή είναι η απάντηση.

<u>Λύση προβλήματος 76</u>
Για καρβέλια πεσού 20, 1/20 του χεκάτ παράγει ένα καρβέλι.
Για καρβέλια πεσού 30, 1/30 του χεκάτ παράγει ένα καρβέλι.

1/20 + 1/30 = 1/12 χεκάτ που φτιάχνει 2 καρβέλια ένα από κάθε είδος. Οπότε ένα χεκάτ θα φτιάχνει δώδεκα καρβέλια κάθε είδους.
Η ποσότητα του αλευριού στα 1000 καρβέλια πεσού 10 είναι 100 χεκάτ.
100 επί 12 ίσον 1200 καρβέλια κάθε είδους που θα ανταλλαχθούν.

Με σκοπό να καταλάβουμε το πρόβλημα θα το ξανακάνουμε με μοντέρνους όρους χρησιμοποιώντας την *unitary method.*

Καταρχήν 1000 καρβέλια πεσού 10 έχουν 100 χεκάτ αλεύρι.
Και 1 χεκάτ αλεύρι παράγει 20 καρβέλια πεσού 20 και
1 χεκάτ αλεύρι παράγει 30 καρβέλια πεσού 30
Μετά: 3 χεκάτ αλεύρι παράγουν 60 καρβέλια πεσού 20 και 2 χεκάτ αλεύρι παράγουν 60 καρβέλια πεσού 30. Επομένως 5 χεκάτ αλεύρι παράγουν 60 καρβέλια κάθε είδους και έτσι 100 χεκάτ αλεύρι παράγουν 60 φορές 20 καρβέλια κάθε είδους και το αποτέλεσμα είναι 1200 καρβέλια κάθε είδους.

A further modern approach now becomes clear to us following the foregoing solution, using the principle of the *harmonic mean.*

The harmonic mean of the two pesus 20 and 30 of the exchange loaves is twice their product divided by their sum, so that the harmonic average of the pesus of the two kinds of loaves considered together is $(2 \times 20 \times 30) \div (20 + 30) = 24$. Now the pesu of the original 1,000 loaves was 10, so that the total number of loaves to be received in exchange is greater in the ratio of 24 is to 10, namely,

$$1{,}000 \times \frac{24}{10} = 2{,}400 \text{ loaves.}$$

Then there will be a half of 2,400 or 1,200 loaves of each kind, pesu 20 and pesu 30, received in exchange for 1,000 loaves of pesu 10.

How similar Problems 74 and 76 appear on casual reading, the first asking for *half* for loaves of one pesu and a *half* for loaves of another, while the second problem asks for *equal* numbers of loaves of the two pesus the scribe mentions. But it was a trap for the unwary. It is interesting to note how well Aᶜh-mosè chose his two numbers 20 and 30 for the pesus. The choice is reminiscent of the modern problem which asks: If a man drives from one town to another at an average speed of 20 miles per hour, and returns at an average speed of 30 miles per hour, what is his average speed for the double journey? This is like Aᶜh-mosè's Problem 76, for the answer to both problems is the harmonic mean of 20 and 30, which is 24 and not 25 (the arithmetic mean). Problem 74 is one in arithmetic means.

The problems of the MMP* dealing with pesus are much the same as those of the RMP, but the scribe was not as careful in his copying

as was Aʿh-mosè. In addition there are some minor errors of arithmetic, so that the meanings of some of the problems are not entirely clear.* MMP 21 is one such problem, and the reader is invited to decide for himself whether or not it resembles Problem 76 of the RMP and whether the suggestion of a harmonic mean can be found there.

l. 1 Method of calculating the mixing of sacrificial bread.
l. 2 If one names 20 measured as $\overline{8}$ of a hekat and 40 measured as $\overline{16}$ of a hekat,
l. 3 compute $\overline{8}$ of 20. Result 2 $\overline{2}$.
l. 4 Compute $\overline{16}$ of 40. Result 2 $\overline{2}$.
l. 5 The total of both these halves is 5.
l. 6 Compute the sum of both halves. Result 60.
l. 7 Divide thou 5 by 60.
l. 8 Result $\overline{12}$. Lo! the mixture is $\overline{12}$. You have correctly found it.

In line 7 the scribe divided 5 by 60 where we would have expected 60 divided by 5 giving the pesu of the sacrificial bread as 12. If one hekat of grain produced 12 loaves of bread then each of these loaves would have a pesu of 12. But the scribe has expressed this differently by saying that each loaf contained one twelfth of a hekat of grain, which is correct. This method of expressing pesu appears to be consistent with line 2 where the fractions $\overline{8}$ and $\overline{16}$ are written for what we would call pesus 8 and 16. If then following the scribe's thoughts we think of fractions only, we come quite naturally to the observation that the answer $\overline{12}$ is the harmonic mean of the two fractions $\overline{8}$ and $\overline{16}$, being equal to twice their product divided by their sum.

EXCHANGE OF LOAVES OF DIFFERENT PESUS

The three problems numbered 72, 73, and 75 of the RMP are all phrased similarly by the scribe, and they treat the same topic.†

RMP 72

100 loaves of pesu 10 are exchanged for loaves of pesu 45. How many of these are there?

RMP 73
100 loaves of pesu 10 are exchanged for loaves of pesu 15. How many of these are there?

RMP 75
155 loaves of pesu 20 are exchanged for loaves of pesu 30. How many of these are there?

Since the greater the pesu, the greater the number of loaves from the same quantity of meal, these three problems are very easily solved by simple proportion as follows:

RMP 72

$$\begin{aligned}\text{No. of loaves} &= 100 \times {}^{45}/_{10}\\ &= 10 \times 45\\ &= 450.\end{aligned}$$

RMP 73

$$\begin{aligned}\text{No. of loaves} &= 100 \times {}^{15}/_{10}\\ &= 10 \times 15\\ &= 150.\end{aligned}$$

RMP 75

$$\begin{aligned}\text{No. of loaves} &= 155 \times {}^{30}/_{20}\\ &= 7\ \bar{2}\ \bar{4} \times 30\\ &= 232\ \bar{2}.\end{aligned}$$

This is exactly how the scribe did solve them, that is, all except Problem 72, which for some reason was done in an entirely different manner. Chace remarks that "He arrives at the result in a round-about way," which is very much of an understatement, and although quite true, it adds nothing to our understanding of the scribe's thought processes in arriving at the correct answer. What was the reasoning behind this round-about solution? Was it perhaps a more advanced technique? Was he attempting to introduce some new concept into mathematical methods?

To attempt to answer these questions, we set down the steps in the argument exactly as the scribe gave them (Chace's translation from Vol. 2), line for line.

RMP 72

1. 100 loaves of pesu 10 exchanged for loaves of pesu 45. How many of these loaves are there?
2. Find the excess of 45 over 10. It is 35. Divide this 35 by 10. You get 3 $\bar{2}$.
3. Multiply this 3 $\bar{2}$ by 100. Result 350. Add 100 to this 350. You get 450.
4. Say then that the exchange is 100 loaves of pesu 10
5. for 450 loaves of pesu 45.

In order to examine logically the steps of the scribe's reasoning, we restate the preceding solution in modern symbolic terms.

1. If x loaves of pesu p are exchanged for y loaves of pesu q, find y if x, p, and q are known.
2. Find the excess of q over p. It is $(q - p)$. Divide this $(q - p)$ by p. You get $\left(\frac{q-p}{p}\right)$.
3. Multiply this $\left(\frac{q-p}{p}\right)$ by x. Result $\left(\frac{q-p}{p}\right)x$. Add x to this. You get $\left(\frac{q-p}{p}\right)x + x$.
4. Say then that the exchange is x loaves of pesu p
5. for $\left(\frac{q-p}{p}\right)x + x$ loaves of pesu q. Then,

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{q-p}{p}\right)x + x \\ &= \left(\frac{q}{p} - 1\right)x + x \\ &= x\frac{q}{p} - x + x \\ &= x \times \frac{q}{p}, \end{aligned}$$

which is the scribe's formula or method for RMP 73 and 75.

Now how did the scribe come to think of all this? The only data which he had a priori was the relation,

$$\text{number of hekats of meal} = \frac{\text{number of loaves}}{\text{pesu}}.$$

Following immediately from this, the scribe can write,

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q},$$

whence, $y = x \times q/p$, which is just what he did for RMP 73 and 75.

But for RMP 72, with the same data, to achieve the same steps in his argument as shown in our symbolic transcription of his solution, we are forced to proceed as follows:

Given

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q},$$

then

$$\frac{y}{x} = \frac{q}{p} \qquad \text{(The modern concept of alternando)}$$

and (line 2)

$$\frac{y - x}{x} = \frac{q - p}{p} \qquad \text{(The modern concept of dividendo);}$$

hence (line 3)

$$y - x = \left(\frac{q - p}{p}\right)x,$$

so that (line 3)

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{q - p}{p}\right)x + x \\ &= \left(\frac{q}{p} - 1\right)x + x \\ &= x\frac{q}{p} - x + x, \end{aligned}$$

therefore,

$$y = x \times \frac{q}{p},$$

exactly as before.

However one looks at this "round-about" method of solution, it is entirely logical and indeed elegant, whether or not the scribe arrived at it by some algebraic or symbolic thought processes, or by some other means. Whatever the true story behind it is, we can only be amazed at such an achievement in 1850 B.C., and suggest that here perhaps, as the scribe wrote it, we are looking at the very earliest example of rhetorical algebra to come to the attention of the historian of mathematics. We cannot avoid introducing the concept of alternando and dividendo in some form or other, because of the scribe's direction in line 2, "Find the excess of q over p."

ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΑΔΑ
ΘΑΛΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΙ
ΝΑΟΥΣΑ 2010
ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΧΜΕΣ
Σωτήρης Συριόπουλος