# Η μακραίωνη ιστορία του μηδενός

## Ο συμβολισμός του μηδενός και η καθημερινή χρήση είναι από τα σημαντικότερα επιτεύγματα του ανθρώπινου νου. Δεν είναι καθόλου αυτονόητο και πήρε χιλιετίες για να γίνει.

Αν έχετε ακούσει την άποψη ότι οι υπολογιστές δεν μετρούν πάνω από το μηδέν και το ένα, μη βιαστείτε να την χειροκροτήσετε. Οι άνθρωποι που το λένε αυτό προφανώς αγνοούν ότι χρειάστηκαν μερικές χιλιετίες εξέλιξης για να περάσουν από την απλή μέτρηση του «ένα...δύο...και πολλά», στη χρήση των γνωστών δέκα αριθμών. Και αρκετές από αυτές τις χιλιετίες ξοδεύτηκαν για να μπορέσουν να ανακαλύψουν τον καταλύτη που εκτίναξε την ανθρωπότητα στο σύγχρονο δεκαδικό λογισμό: **τον αριθμό μηδέν.**

Η «ζωγραφική της γλώσσας» (Βολταίρος), η γραφή, είναι κάτι παραπάνω από ένα απλό εργαλείο. Περικλείει και ακινητοποιεί τη σκέψη, αλλά κυρίως την οργανώνει στο μυαλό του ανθρώπου. Εκτός από το να απεικονίζει καθαρά τον έναρθρο λόγο, «επιτρέπει την ίδια αντίληψη σκέψεων» (Ch. Higounet). Αυτή η ιδιότητα του γραπτού λόγου γίνεται φανερή στη συμβολική των αριθμών, η οποία από μόνη της οδηγεί σε πρωτοφανείς «σκέψεις» (υπολογισμούς) που θα ήταν αδύνατον να «ειπωθούν» με τον έναρθρο λόγο. Ο γραπτός αριθμητικός λογισμός είναι ένα εργαλείο που δεν περιγράφει μόνο, αλλά προχωρά μπροστά τη λογική με άλματα, εκεί που ο προφορικός λόγος ασθμαίνει. Για να γίνει αυτός ο λογισμός ένα τόσο ικανό εργαλείο, χρειάστηκε να ανακαλυφθούν και να ενοποιηθούν τρεις θεμελιώδεις ιδέες: η Προσθετική Αρχή, η Αρχή της Θέσης και το Μηδέν.

Η αρχή της ανθρώπινης ικανότητας να μετρά χάνεται στο βάθος των χιλιετηρίδων. Ένα όμως είναι βέβαιο: Υπήρξαν εποχές που δεν ξέραμε καθόλου να μετράμε. Απόδειξη είναι ότι υπάρχουν ακόμη και στις μέρες μας άνθρωποι ανίκανοι να συλλάβουν οποιονδήποτε αφηρημένο αριθμό και δε γνωρίζουν ότι δύο και δύο κάνουν τέσσερα.

Η καταπληκτική ευκολία με την οποία χειριζόμαστε τους αριθμούς σήμερα δεν εμφανίστηκε ξαφνικά σαν δώρο θεού ή κάποιου ήρωα. Ελευθερώθηκε σιγά-σιγά ύστερα από χιλιετίες δοκιμών και ψηλαφήσεων, καταπτώσεων, διώξεων και επαναστάσεων, μέχρις ότου ο άνθρωπος να διαλέξει μια ολοκληρωτική αποδοτική μέθοδο. Η εφεύρεση των δέκα ψηφίων, που ονομάζονται λανθασμένα «αραβικά», και ο γραπτός υπολογισμός υπήρξαν θεμελιώδεις ανακαλύψεις οι οποίες άλλαξαν εντελώς την ύπαρξη του ανθρώπου.

**Η ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΣΟΥΜΕΡΙΩΝ.** Στις προϊστορικές εποχές ο άνθρωπος χρησιμοποίησε μοντέλα για να θυμάται το πλήθος των πραγμάτων που κατείχε. Χάραξε σε πέτρες και σε κομμάτια ξύλου γραμμούλες που αντιπροσώπευαν τα πρόβατά του και άλλα μετρήσιμα πράγματα, χρησιμοποίησε τα δάχτυλά του, έφτιαξε κόμπους σε σχοινιά, συγκέντρωσε βότσαλα. Οι πρόγονοι αυτοί του σύγχρονου calculator (εκ του calculi, που σημαίνει ακριβώς βότσαλο) είχαν ένα χαρακτηριστικό: τον απλό «αντιπροσωπευτικό» χαρακτήρα. Μια χούφτα βότσαλα δεν ήταν παρά μια «μακέτα» σε μικρογραφία του ίδιου του κοπαδιού. Κάθε βότσαλα ήταν ένα πρόβατο ή ένα «πακέτο» προβάτων και τίποτε άλλο. Δεν ήταν μέτρηση αλλά «φωτογράφηση». Δεν μπορούσες να κάνεις υπολογισμούς με αυτά τα βότσαλα ή τους σπάγκους, τουλάχιστον όχι καλύτερα απ' ότι μπορούσες να τους κάνεις χρησιμοποιώντας τα ίδια τα πρόβατα. Αλλά ο άνθρωπος δεν ξεκίνησε από τους υπολογισμούς. Η πρωταρχική του ανάγκη ήταν να «καταμετρήσει» και να θυμάται την καταμέτρηση, και αυτή ακριβώς η ανάγκη τον οδήγησε στη συγκεκριμένη αντιπροσώπευση. Ένα κομπολόι ή μερικές χαρακιές, και έτοιμο το αρχείο της απογραφής! Εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο «γραφόταν» ένα τέτοιο αρχείο, τα σύμβολα που προέκυπταν είχαν μια ιδιότητα που ο προϊστορικός μας απογραφέας δεν μπορούσε να φανταστεί και η οποία θα τον οδηγούσε στην **Προσθετική Αρχή.** Οι χαρακιές και τα σύμβολα αντιπροσώπευαν τον τρόπο με τον οποίο έγινε η ίδια η καταμέτρηση: «Ένα...και ένα...και ένα...και ένα...και ένα...μια πεντάδα πρόβατα...και ένα...και ένα...» κ.λ.π. Οι πέντε χαρακιές έγιναν πεντάδες, απέκτησαν δικό τους σύμβολο και έτσι εμφανίστηκαν οι τάξεις μεγεθών. Η σειραϊκή παράθεση και οι τάξεις ήταν αυτές που οδήγησαν στη μετατροπή των συμβόλων σε πραγματικούς αριθμούς...Μια πολύ αρχαία γραπτή διαίρεση που συνέβη σε μια «Σχολή Γραφέων και Λογιστών» στην πόλη Σουρουπάκ του της Σουμερίας (σημερινό Ιράκ) το 2560 π.Χ. δείχνει πως μπορεί να γίνει αυτό.

Ο δάσκαλος της σχολής αυτής ζήτησε από τους μαθητές του να μοιράσουν τα 1.152.000 σίλα (αρχαία μονάδα χωρητικότητας ίση με 0,842 του σημερινού λίτρου) σιταριού μιας αποθήκης, ώστε κάθε δικαιούχος να πάρει 7 σίλα σιτάρι. Πόσοι ήταν αυτοί οι δικαιούχοι; (Η πράξη με το σημερινό συμβολισμό είναι: 7xX=1.152.000).

Οι μαθητές ξεκίνησαν να λύνουν το πρόβλημα με τον πανάρχαιο τρόπο τους χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή της εποχής: Τους πεσσούς. Πήραν 32 διάτρητες σφαίρες φτιαγμένες από άργιλο διαμέτρου δύο εκατοστών και αξίας 36.000 σιλών (32 x 36.000 = 1.152.000) και τις παρέταξαν σε ένα τραπέζι. Έβγαλαν τέσσερις (4) επτάδες και περίσσεψαν τέσσερις διάτρητες σφαίρες. Έπειτα διαίρεσαν το υπόλοιπο σε επτάδες από σφαίρες χωρίς τρύπα αξίας 3.600 σιλών. Συνέχισαν με τον ίδιο τρόπο «σπάζοντας σε ψιλά» τα υπόλοιπα χρησιμοποιώντας διαδοχικά διάτρητους κώνους, κώνους χωρίς τρύπα κ.λ.π. Με αυτή την «προσεγγιστική μέθοδο» βρήκαν τελικά μια παράταξη πεσσών που αντιπροσώπευε τον πολυπόθητο αριθμό. Ο «επιτραπέζιος» αυτός υπολογισμός έπρεπε τώρα να γίνει «φορητός». Αν ζούσαν μόλις μια χιλιετία πριν, αυτοί οι μαθητές θα μάζευαν τους πεσσούς και θα τους έβαζαν σε ένα πήλινο δοχείο, που θα το σφράγιζαν και θα το έδιναν στο δάσκαλο. Αλλά το 2560 π.Χ. τέτοιες «πρωτόγονες» μέθοδοι είχαν καταργηθεί. Από το 3300 π.Χ. εμφανίζονται αναπαραστάσεις των πεσσών πάνω στις πήλινες θήκες, και το 2850 π.Χ. οι θήκες αντικαθίστανται με πλάκες πάνω στις οποίες είναι σκαλισμένες οι αναπαραστάσεις των πεσσών. Έτσι, οι μαθητές του 2560 π.Χ. χάραξαν με ένα κατάλληλα διαμορφωμένο καλάμι πάνω σε μια πλάκα αργίλου αυτό που έβλεπαν στο τραπέζι. Από αριστερά προς τα δεξιά οι εικόνες ενός μικρού κώνου, δέκα σφαιριδίων, δύο μεγάλων κώνων, τεσσάρων μεγάλων διάτρητων κώνων, πέντε μεγάλων σφαιρών και τεσσάρων μεγάλων διάτρητων σφαιρών διαβαζόταν:

$$1 + (5 \times 10) + (2 \times 60) + (4 \times 600) + (5 \times 3.600) + (4 \times 36.000) = 164.571$$

Η χάραξη των συμβόλων αυτών πάνω στις πλάκες από άργιλο, τους ανάγκασε να κρατούν μια σειρά στη γραφή που βοηθούσε να τους ξεχωρίζουν οπτικά.

Αυτή η σειρά ταίριαζε με τον τρόπο που πρόφεραν τα μεγέθη, δηλαδή, «ένα σίλο και πέντε δεκάδες σίλα και...». Έτσι, η προσθετική σειρά του προφορικού λόγου πέρασε στον αντίστοιχο γραπτό τους συμβολισμό.

Παρά το γεγονός ότι για να γίνει αυτή η πανάρχαια διαίρεση χρησιμοποιήθηκε ένα «calculator» (οι πεσσοί), το γραπτό αποτέλεσμα μας δείχνει ότι ο λαός αυτός είχε ανακαλύψει μια εξαιρετικής αξίας ιδέα: **την Προσθετική Αρχή.** Τον τρόπο δηλαδή να απεικονίζουν ένα μεγάλο αριθμό διατάσσοντας τα αντιπροσωπευτικά σύμβολα το ένα δίπλα στο άλλο δίκην προσθέσεως. Αυτή η πράξη έδινε τη δυνατότητα στους ανθρώπους αυτούς να μπορούν να θυμούνται το ποσό χωρίς να χρειάζεται να μεταφέρουν μαζί τους τους πεσσούς..

Χαρακτηριστικά παραδείγματα πιο γνωστών αριθμητικών συστημάτων που βασίζονται στην Προσθετική Αρχή είναι το αρχαιοελληνικό σύστημα και το πιο γνωστό μας λατινικό

**ΤΟ ΛΑΤΙΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ.** Η λατινική απεικόνιση των αριθμών είναι ένα κλασικό παράδειγμα εφαρμογής της Προσθετικής Αρχής. Οι λατινικοί αριθμοί συνίστανται από επτά διαφορετικά σύμβολα:I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000

Οι ενδιάμεσοι αριθμοί παράγονται με την προσθετική ή την αφαιρετική μέθοδο.

Στην προσθετική μέθοδο τα σύμβολα με τις μικρότερες τιμές ακολουθούν αυτά με τις μεγαλύτερες, π.χ., II=2, III=3, VII=7, XXX=30, LXX=70.

Στην αφαιρετική μέθοδο ένα, και μόνο ένα, σύμβολο μικρότερης τιμής προηγείται ενός με μεγαλύτερη τιμή, π.χ., IV=4, IX=9, XL=40, IL=49, CM=900.

Επίσης πρέπει να ακολουθούνται τρεις κανόνες:

1. Τα σύμβολα δεν πρέπει να επαναλαμβάνονται πάνω από τρεις φορές στη σειρά. Έτσι, το III επιτρέπεται, το IIII όχι (Πολλές φορές οι λιθοξόοι δεν τηρούν τον κανόνα σε αρχαίες επιγραφές.)

2. Μόνο ένα σύμβολο μικρότερης τιμής μπορεί να μπει μπροστά από σύμβολο μεγαλύτερης τιμής, π.χ. δεν επιτρέπεται το IIV.

3. Τα σύμβολα V, L και D δεν αφαιρούνται ποτέ.

Η Προσθετική Αρχή παράγει μεγάλους αριθμούς και χρειάζεται πολλά σύμβολα. Το λατινικό 5 (V) είναι 5 όπου και αν εμφανίζεται μέσα στον αριθμό και δεν γίνεται 5.000 στην τέταρτη θέση. Έτσι, η λατινική γραφή χρειάζεται ειδικά σύμβολα για κάθε τάξη μεγέθους, όπως1, 5, 10, 50, 100 κ.λ.π.

Δείτε μερικούς αρχαίους ρωμαϊκούς αριθμούς:

- MMMDCCLXXIX: «τρεις χιλιάδες και μια πεντακοσάδα και δύο εκατοντάδες και μια πενηντάδα και δύο δεκάδες και μια δεκάδα έξω ένα» =3.779

- MXXIV=1024

- MLXVI=1066

- MCDXII=1492

- MCMXCIX=1999

- MDCCLXXVI=1776

Επίσης, αν οι Ρωμαίοι ήθελαν να γράψουν τις χιλιάδες και τις εκατοντάδες χιλιάδων κάποιου αριθμού, τα πράγματα γίνονταν ιδιαίτερα σκούρα και κατέφευγαν σε γραφικούς συμβολισμούς, όπως η ανωγράμμιση με μια μακριά παύλα ή την πλαισίωσή με ένα μακρύ «Π».

Πολλές φορές χρειαζόταν το μάτι του ειδικού για να διαβαστούν οι αριθμοί της εποχής. Ένα μεγάλο βήμα έπρεπε να γίνει προς την κατάκτηση της σαφήνειας και της οικονομίας. Μια ιδιότητα που θα την ονομάσουμε **Θεσιακή Αρχή (Αρχή της Θέσης).**

**ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΕΤΑΙ ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΘΕΣΗΣ.** : Ένας αρχαίος κινέζικος αριθμός της τρίτης χιλιετίας π.Χ. αποτελείται από εννέα σύμβολα για τους πρώτους εννέα αριθμούς και πάρα πολλές άλλες λέξεις που περιγράφουν την τάξη μεγέθους κάθε αριθμού. Ο αριθμός 7.829, για παράδειγμα, χρειαζόταν επτά σύμβολα για να γραφτεί. Τα επτά αυτά σύμβολα στη σειρά διαβάζονται:

Έτσι έλυναν οι Κινέζοι το πρόβλημα των τάξεων. Παρ' ότι σε σας έρχεται αμέσως στο νου να καταργήσετε τις λέξεις ανάμεσα στους αριθμούς για μια τέτοια απεικόνιση, χρειάστηκαν πάρα πολλοί αιώνες για να το σκεφτούν οι Κινέζοι αλλά και η υπόλοιπη ανθρωπότητα..

Έτσι έπρεπε να περιμένουμε χίλια χρόνια για να το ανακαλύψουν οι Βαβυλώνιοι στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ., λίγο πριν από την εποχή του βασιλιά Χαμουραμπί

Οι Βαβυλώνιοι σοφοί είχαν εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης. Όσοι είστε εξοικειωμένοι με τα συστήματα αρίθμησης θα σχολιάσετε αμέσως ότι χρειάζονται 60 διαφορετικά σύμβολα για να αναπαραστήσουν κάποιον αριθμό στο εξαδικό σύστημα, παρ˙ ότι ο ίδιος αριθμός θα είχε πολλά λιγότερα ψηφία από ότι οι σημερινοί μοντέρνοι αριθμοί που αναπαρίστανται στο δεκαδικό σύστημα. Αλλά για σκεφτείτε λίγο καλύτερα.....Μήπως το σχόλιό σας προέρχεται από τον καθιερωμένο σύγχρονο τρόπο σκέψης και υλοποίησης της γραφής των αριθμών στα διάφορα αριθμητικά συστήματα.

Πάντως οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν μόνο..... δύο σύμβολα (!): τη «σφήνα» και το «καρφί». Ο αριθμός 1 ήταν μια σφήνα. Το 10 (αμέσως επόμενη τάξη) ήταν ένα καρφί. Τα άλλα 57 απαραίτητα σύμβολα (η σύλληψη του μηδενός ως αριθμού και η απεικόνισή του ως συμβόλου δεν είχε επέλθει ακόμα) τα δημιουργούν από αυτά τα δύο σύμβολα. Το 9, για παράδειγμα, συμβολιζόταν με ισάριθμες σφήνες σε τρεις τριάδες, ενώ ο αριθμός 19 γραφόταν σαν ένα καρφί και δεξιά του εννέα σφήνες σε τρεις τριάδες. Το 59 με πέντε καρφιά και εννέα σφήνες.

Φτάσαμε τώρα στη βάση του εξηνταδικού συστήματος. Το 60 ήταν πάλι ένα καρφί. Ο αριθμός 69 δεν γραφόταν με έξι σφήνες και εννέα καρφιά, αλλά με ένα καρφί του 60 και εννέα καρφιά του 1 δίπλα του. Πως το ξεχώριζαν λοιπόν; Όπως και εμείς σήμερα: Το μόνο που διαφοροποιούσε αυτό το καρφί του 60 από τα διπλανά καρφιά του 1 ήταν η θέση του.

Ένα πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται είναι ότι ο αριθμός 61 αναπαρίσταται με δύο «καρφιά», όπως και ο αριθμός 2. Για να το λύσουν αυτό το πρόβλημα οι Βαβυλώνιοι ένωναν τα «καρφιά» που αναπαριστούσαν μονάδες σε συμπλέγματα όπου το ένα «καρφί» ακουμπούσε το άλλο ώστε να αποτελούν ενιαίο σύμβολο.

Επίσης θα παρατηρήσατε αμέσως ένα ακόμα μεγαλύτερο πρόβλημα: ο αριθμός 1 και ο αριθμός 60 είχαν ακριβώς την ίδια απεικόνιση: ένα «καρφί». Αυτό το πρόβλημα το αντιμετώπισαν αμέσως οι Βαβυλώνιοι, αλλά θα το συζητήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Αν σκεφτεί κανείς ότι οι μεγάλοι πολιτισμοί όπως των Ελλήνων, των Αιγυπτίων και των Ρωμαίων πορεύτηκαν μόνο με προσθετικά συστήματα μέχρι τους πρώτους αιώνες μετά Χριστόν, εκτιμά ότι αυτή η ανακάλυψη των Βαβυλωνίων ήταν εκπληκτική. Χάρη στην Αρχή της Θέσης, δεν χρειάζονταν ιδιαίτερα σύμβολα για να περιγράψουν αριθμούς ανώτερης τάξης ούτε η γλώσσα όπως οι Κινέζοι. Από τη άλλη, όλοι οι προηγούμενοι πολιτισμοί χρησιμοποιούσαν το «φυσικότερο» δεκαδικό σύστημα (δέκα δάκτυλα έχουμε στα χέρια) αντί για το εξηνταδικό και κανείς μέχρι σήμερα δεν απαντήσει ικανοποιητικά αναφορικά με το λόγο για τον οποίο οι Βαβυλώνιοι (για την ακρίβεια οι Σουμέριοι από τους οποίους οι Βαβυλώνιοι πήραν το σύστημά τους) χρησιμοποιούσαν εξηνταδικό σύστημα.

Φυσικά, εξαιτίας ακριβώς αυτής της εξελιγμένης Αρχής της θέσης που χρησιμοποιούσαν στην απεικόνιση των αριθμών τους, οι Βαβυλώνιοι ήρθαν πρώτοι αντιμέτωποι με το πρόβλημα του μηδενός που προαναφέραμε...

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΗΔΕΝ.** Όταν εφαρμόζεται η Αρχή της Θέσης φτάνει κάποια στιγμή που είναι απολύτως αναγκαίο να διαθέτουμε ένα γραφικό σχήμα ειδικό για τις τάξεις που είναι μηδενικές. Εμείς, όταν μετράμε στο δεκαδικό σύστημα με την αραβική απεικόνιση των αριθμών, όταν θέλουμε να γράψουμε τον αριθμό 102 χρησιμοποιούμε ένα σύμβολο που εκπροσωπεί το «καθόλου δεκάδες». Αυτό το ρόλο παίζει το μηδέν. Αν δεν υπήρχε, πολύ εύκολα θα μπερδεύαμε το 102 με το 12. Οι Βαβυλώνιοι του 1750 π.Χ. που δεν διέθεταν μια τέτοια έννοια ήταν πολύ εύκολο να μπερδέψουν το δικό τους αριθμό 2 με εκείνον του 61.

Για να λύσουν το πρόβλημα, αποφάσισαν να βάζουν μια απόσταση ανάμεσα στο πρώτο καρφί και στο δεύτερο στην περίπτωση του 61.

Δεν πρόλαβαν να χαρούν με αυτή την ιδέα, γιατί τους προέκυψε ένα πρόβλημα ανάγνωσης. Η «απόσταση» είναι σχετικό πράγμα και πολλές φορές δημιουργούσε παρεξηγήσεις και σφάλματα. Βέβαια, σε ένα σημερινό αριθμό η πιθανότητα για κάθε γράμμα του να είναι μηδέν είναι μια στις δέκα, ενώ σε ένα Βαβυλωνιακό είναι πολύ μικρότερη, μια στις εξήντα, αλλά αυτό δεν είναι λύση. Πόσο μάλλον αν δύο διαδοχικές τάξεις είναι μηδέν΄ άντε να ξεχωρίσεις ένα από δύο διαστήματα. Επίσης, αν σκεφτούμε ότι οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν σύμβολο για τη υποδιαστολή και την έγραφαν και αυτή ως κενό, τότε είναι απορίας άξιο πως τα κατάφερναν. Χρειάστηκε να περάσουν αρκετοί αιώνες ακόμα και να φτάσουμε στους τελευταίους Βαβυλωνιακούς πολιτισμούς για να υιοθετηθεί το σύμβολο του μηδενός, δανειζόμενοι το «2» και πλαγιάζοντάς το. Το «μηδέν» είχε εφευρεθεί!

Μια άλλη φυλή στην άλλη άκρη της Γης, και φυσικά ανεξάρτητη από τους Βαβυλώνιους, έκανε τις ίδιες ανακαλύψεις. Όπως προκύπτει από τα σπάνια χειρόγραφά τους (Κώδικας της Δρέσδης), οι Μάγια κατά τον 3ο αιώνα μ.Χ., χρησιμοποιούσαν ένα εξελιγμένο προσθετικό και «θεσιακό» σύστημα., με δύο μόνον σύμβολα: τις τελείες και τις παύλες. Οι τελείες αντιπροσώπευαν τις μονάδες και οι παύλες τις πεντάδες:

Στοίβαζαν τους αριθμούς θεσιακά σε «ορόφους», διαβάζοντας τον αριθμό από πάνω προς τα κάτω, ενώ οι τάξεις τους πήγαιναν από την μονάδα στην εικοσάδα, την 360άδα, την 7200άδα, την 144.000άδα κ.λ.π.

Όταν αντιμετώπισαν το πρόβλημα των «άδειων τάξεων», οι Μάγια υιοθέτησαν αμέσως σύμβολα για να γεμίσουν το κενό. Διέθεσαν μια ολόκληρη σειρά από παραλλαγές «ματιών», «κογχυλιών» και άλλων μορφών.

Κάτι τέτοιο τους ήρθε εντελώς φυσικά, καθώς δεν ήταν κάτι καινούργιο γι' αυτούς. Το είχαν αντιμετωπίσει για πρώτη φορά το 3113 π.Χ. (1100 χρόνια πριν από τους Βαβυλώνιους) όχι στην αριθμητική τους αλλά στο ημερολόγιο.

Βλέπετε, η προσθετική και η θεσιακή ιδιότητα στους αριθμούς του εκπληκτικού αυτού λαού προήλθαν από την απλοποίηση του πανάρχαιου τρόπου με τον οποίο οι ιερείς – αστρονόμοι τους, σημείωναν τον παρελθόντα χρόνο στις ιερές ημερολογιακές τους στήλες. Για να εκφράσουν τις ημερομηνίες τους οι ιερείς αυτοί είχαν αναπτύξει ένα σύστημα ιερογλυφικών με σύμβολα που αντιπροσώπευαν τα χρονικά διαστήματα ως πολλαπλάσια των ημερών.

Συμβόλιζαν το «πέντε χρόνια» με το ιερογλυφικό του ΤΟΥΝ συνδεδεμένο με το αριθμητικό σύμβολο του «πέντε» (μια παύλα). Αν όμως ήθελαν να πουν ότι πέρασαν ακριβώς 9 ΜΠΑΚΟΥΝ και 17 ΚΑΤΟΥΝ, έκαναν κάτι πολύ περίεργο: Σκάλιζαν τα ιερογλυφικά του ΜΠΑΚΟΥΝ και του ΚΑΤΟΥΝ με τα αριθμητικά τους σύμβολα, αλλά δεν ξεχνούσαν ποτέ να σκαλίσουν και τα υπόλοιπα ιερογλυφικά των ΤΟΥΝ, ΟΥΙΝΤΑΛ και ΚΙΝ. Ήταν σαν να μην ήθελαν να παραλείψουν την παρέλευση των ετών, των μηνών και των ημερών και ας μην είχαν περάσει καθόλου τέτοια. Σκάλιζαν δε αυτά τα ιερογλυφικά συνδεδεμένα με κάτι που δεν ήταν «παύλα» ή «τελεία»˙ ήταν προφανώς σύμβολα που σήμαιναν «τίποτε».

Γιατί έκαναν αυτό τον κόπο; Μα φυσικά για να αποφύγουν την ασέβεια προς τους Θεούς! Σύμφωνα με την θρησκεία των Μάγια, κάθε χρονική περίοδος αλληλοδιαδεχόταν την άλλη, μεταφερόμενη από ένα θεό – φορέα, υπεύθυνο γι' αυτή τη χρονική περίοδο. Τα ονόματα «ΚΙΝ», «ΟΥΙΝΤΑΛ» κ.λ.π. δεν ήταν άλλα από τα ονόματα αυτών ακριβώς των θεών. Πράγματι, αν ήθελαν να πάει καλά η χρονιά, πρόσφεραν θυσίες στο θεό ΤΟΥΝ. Επειδή λοιπόν οι θεοί αλληλοδιαδέχονταν ο ένας τον άλλο στη μεγάλη χρονική συνέχεια του κόσμου, θα ήταν μεγάλη ασέβεια να παραστήσουν τον αριθμό 9 ΜΠΑΚΟΥΝ + 17 ΚΑΤΟΥΝ παραλείποντας τελείως τους θεϊκούς φορείς ΤΟΥΝ, ΟΥΙΝΤΑΛ και ΚΙΝ από την επιγραφή. Έπρεπε να τους σκαλίσουν να κουβαλούν κάτι, οτιδήποτε, έστω ένα σύμβολο του «τίποτα». Έτσι, από σεβασμό και φόβο προς τους θεούς, είχαν επινοήσει ένα πρωταρχικό σύμβολο για την «μηδενική ποσότητα», χωρίς να φανταστούν ότι τρεις χιλιετίες μετά αυτή η ίδια ιδέα θα τους έλυνε και το πρόβλημα των «κενών τάξεων». Έτσι, οι Μάγια έγιναν ο δεύτερος λαός που πέρασαν από την θεσιακή αριθμητική στο μηδέν.

Κάπου αλλού, κάποιοι άλλοι ενδιαφερόντουσαν ειδικά για τους γραπτούς πρακτικούς υπολογισμούς. Αυτοί οι άνθρωποι έβαλαν τις βάσεις για το σημερινό σύστημα αρίθμησης. Οι αρχαίοι κάτοικοι της Βόρειας Ινδίας, οι Ιντού, χρησιμοποιούσαν από πολύ παλιά μια στοιχειώδη αριθμητική εννέα βασικών συμβόλων με σύστημα που ακολουθούσε την Προσθετική Αρχή.

Επειδή η αρχαία αυτή συμβολική δεν περιείχε την Αρχή της θέσης, ήταν αναγκασμένοι να χρησιμοποιούν σύμβολα για κάθε αριθμό ανώτερης τάξης. Έτσι, είχαν άλλα εννέα σύμβολα για το 10 έως το 90, άλλα εννέα για το 100 έως το 900 κ.ο.κ. Μια απλή πρόσθεση λοιπόν ήταν αδύνατη και δεν υπήρχε περίπτωση να μετρήσει κανείς πέρα από το 99.000! Οι αστρονόμοι τους είχαν παρακάμψει αυτή την δυσκολία, εκφράζοντας τους αριθμούς με λέξεις….. δηλαδή προφορικά! Έτσι, ακολούθησαν από νωρίς ένα δρόμο που θα τους οδηγούσε στην ανακάλυψη της Αρχής της θέσης και του Μηδενός. Η προφορική αυτή αρίθμηση ήταν εξαιρετικής ποιότητας και απέκλειε τα λάθη. Έδιναν πρώτα ένα όνομα σε κάθε αριθμό: ΕΚΑ (1), ΝΤΒΙ (2), ΤΡΙ (3), ΚΑΤΙΡ (4), ΠΑΝΚΑ (5), ΣΑΤ (6), ΣΑΠΤΑ (7), ΑΣΤΑ (8), ΚΑΒΑ (9) και μετά, απλοποιώντας το «συμβολικό» σύστημα, έδιναν μια λέξη στη δεκάδα (ντασά), στην εκατοντάδα (σατά), στη χιλιάδα (σαχασρά) κ.λ.π. Αν ήθελαν, επομένως, να πουν τρεις χιλιάδες, έλεγαν τρι σαχασρά. Η μέθοδος όμως χρειαζόταν βελτίωση.

Έπρεπε να γίνει θεσιακή και την έκαναν καταργώντας τις λέξεις για τη δεκάδα και την εκατοντάδα και κρατώντας μόνο τις αντίστοιχες λέξεις των εννέα βασικών αριθμών. Έτσι, ΕΚΑ ΝΤΒΙ ΤΡΙ σήμαινε απλά 321 (έγραφαν ανάποδα από εμάς)

Αυτό τους επέτρεψε να συναντηθούν με το πρόβλημα των άδειων τάξεων, όπως του αριθμού 301. Οι Ινδοί παρέκαμψαν το εμπόδιο με τη λέξη «ΣΟΥΝΙΑ». Έτσι, έλεγαν ΕΚΑ ΣΟΥΝΙΑ ΤΡΙ για τον αριθμό 301 (ανάποδα θυμίζουμε). Και με τις μηδενικές τάξεις δεν είχαν πρόβλημα. Τις έλεγαν όλες ΣΟΥΝΙΑ και τις καταλάβαιναν από τη σειρά τους: ΣΟΥΝΙΑ ΣΟΥΝΙΑ ΣΟΥΝΙΑ ΤΡΙ = 0003 (τρεις χιλιάδες).

Οι Ινδοί μαζί με τους Μάγια και τους Βαβυλώνιους ανακάλυψαν και αυτοί το μηδέν των άδειων τάξεων. Δεν ήταν όμως ευχαριστημένοι, γιατί οι ανακαλύψεις τους (θέση και μηδέν) δεν εφαρμόζονταν παρά μόνο σε λέξεις. Το Θαύμα της μεγάλης συνένωσης των εννέα αριθμών τους, της Αρχής της θέσης και του Μηδενός έγινε από τους Ινδούς του Βορρά για χάρη ολόκληρης της Ανθρωπότητας στα τέλη του 5ου αιώνα μ.Χ.

**ΤΡΑΓΟΥΔΩΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.** Για φανταστείτε τον αριθμό 4.320.000 στα αρχαία ινδικά:

**βιγιανταμμπαρακαζασουνγιαγιαμαραμαβέντα.**

Στην προφορική τους γλώσσα οι Ινδοί διέθεταν για καθέναν από τους εννέα αριθμούς τους, εκτός από το κανονικό του όνομα, πάνω από έξι άλλα συνώνυμα. Το 1 λεγόταν και πιταχά (ο Πρώτος Αέρας), αντί (η Αρχή), τάνι (το Σώμα) κ.λ.π. Το ίδιο συνέβαινε και με το μηδέν τους. Γιατί αυτό; Ο λόγος ήταν ότι οι Ινδοί αστρονόμοι ήταν απαράμιλλοι ποιητές. Ως ποιητές χρησιμοποιούσαν αυτά ακριβώς τα ονόματα για να φτιάχνουν αριθμολέξεις όπως η παραπάνω, που, όσο απίστευτη και αν φαίνεται σε εμάς, για κείνους ήταν μια όμορφη λέξη με μέτρο και ρυθμό. Ένας αριθμός ήταν επίσης ένας στίχος με νόημα, καθώς και ο απόλυτος μνημονικός τρόπος για να θυμούνται το νούμερο που αντιπροσωπεύει. Όπως εξηγεί ο Ροζέ Μπιγιάρ, «*το ινδικό αστρονομικό κείμενο ήταν πάντα σε στίχους και υπήρχαν πολλές επιλογές για ένα συνώνυμο με δεδομένο μέτρο. Η λέξη – σύμβολο επιλεγόταν για το μέτρο της και έμενε στη μνήμη του αστρονόμου σαν επικό ποίημα*». Στο μέτρο και το ρυθμό των

Ινδών λόγιων δεν ταίριαζε το σούνια – σούνια – σούνια – γιαμά – ραμά – βεντά. Έτσι, για κάθε διαφορετικό «σούνια» έγραφαν ένα από τα πολλά του συνώνυμα. Με τον τρόπο αυτό μπορούσαν να συγκρατούν στη μνήμη τους τεράστια αστρονομικά δεδομένα με τη μορφή ποιήματος.

Τον καιρό εκείνο κανείς Ινδός αστρονόμος δεν είχε σκεφτεί φυσικά να προσθέσει και να πολλαπλασιάσει λέξεις όπως οι παραπάνω. Πως να προσθέσεις Χέρια του Βισνού με Σελήνες και Οπές; Χρησιμοποιούσαν τέτοιες αριθμολέξεις μόνο για να συγκρατούν αριθμούς και όχι για να υπολογίσουν. Την ίδια στιγμή, οι λογιστές της Ινδίας, οι οποίοι ενδιαφέρονταν για τους υπολογισμούς, είχαν ακολουθήσει μια παράλληλη εξέλιξη και είχαν αναπτύξει μερικές τεχνικές χρησιμοποιώντας την παλιά γραφή με τα εννέα σύμβολα. Η δουλειά τους αυτή είχε αποδώσει τόσο πολύ ώστε έγιναν διάσημοι για την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητά τους στην Ινδία και στους γύρω λαούς. Πως ήταν δυνατόν με ένα σύστημα που δεν επέτρεπε ούτε την πρόσθεση; Πράγματι οι Ινδοί λογιστές τα κατάφερναν ως τότε όπως οι Έλληνες με το αβάκιο και τους πίνακες. Κατ΄ αρχάς είχαν υιοθετήσει ένα είδος αβακίου. Έριχναν λεπτή άμμο σε ένα τραπέζι και έγραφαν πάνω της τα εννέα βασικά τους νούμερα με ένα ραβδί. Επιπλέον, είχαν καταργήσει τα σύμβολα για τις ανώτερες τάξεις και χρησιμοποιούσαν στήλες και γραμμές που αντιπροσώπευαν τις δεκάδες, τις εκατοντάδες κ.λ.π. Όταν κάποια τάξη μεγέθους δεν είχε μονάδες, το «κουτάκι» της έμενε κενό. Το κενό όμως αυτό κουτάκι δεν ήταν ένα απλό «κενό». Επειδή ο άβακας από άμμο ήταν ουσιαστικά γραπτό αριθμητικό κείμενο που το έσβηναν και το ξαναέγραφαν με το ραβδί ανάλογα με το στάδιο της πράξης, το κενό κουτάκι συμμετείχε στους υπολογισμούς όσο και οι κανονικοί αριθμοί! Έτσι, προχώρησαν στο συνδυασμό δύο μεγάλων αριθμητικών ρευμάτων: του θεσιακού τρόπου αρίθμησης και του δεκαδικού συστήματος.

**ΤΟ ΜΕΓΑΛΟ ΒΗΜΑ.** Η «γραπτή» μέθοδος των Ινδών βοηθούσε μεν να αναπαρασταθούν με την ίδια ευκολία ο αριθμός 7.629: 7 6 2 9 καθώς και ο 10.267.000:1 _ 2 6 7 _ _ _, αλλά για να γίνει ο πολλαπλασιασμός: του 325 επί 28 απαιτούνταν ώρες:

325 x 28

=[(3x2)x1000+(3x8)x100]+[(2x2)x100+(2x8)x10]+[(5x2)x10+(5x8)].

Ενοχλημένοι από αυτή τη χρονοβόρα διαδικασία που απαιτούσε εκτεταμένη προσοχή και το χέρι ενός ειδικού, προχώρησαν σε μια σημαντική πρόοδο, με μια ανατροπή που συνέβη από κάποιον άγνωστο λογιστή της Βόρειας Ινδίας τον 6ο αιώνα μ.Χ.

Όπως αναφέραμε ήδη, εδώ και γενεές οι αρχαίοι Ινδοί αστρονόμοι πρόφεραν τους αριθμούς ως εξής: π.χ. το 9.100 διαβαζόταν : ατμόσφαιρα (0), κενό (0), σελήνη (1), οπές (9)

Με τους αστρονόμους να έχουν ανακαλύψει μια προφορική αρίθμηση θέσης με μηδέν και τους λογιστές να έχουν εξασκηθεί σε ένα σύστημα «άβακα» που χρησιμοποιούσε το «κενό» ως υπολογίσιμο στοιχείο, έμενε αυτός ο άγνωστος λογιστής να ενοποιήσει αυτούς τους δύο τρόπους σκεπτόμενος:

«Γιατί να μην παριστάνουμε, τουλάχιστον στο πρόχειρο, τα εννέα ψηφία, τα οποία ούτως ή άλλως τα λέμε προφορικά, χρησιμοποιώντας ένα σύμβολο για τα κενά κουτιά;»

Έτσι γεννήθηκε το «μπιντού», δηλαδή το «σημείο».

Από εκεί και πέρα ακολούθησε μια επαναστατική σειρά εξελίξεων. Ξαφνικά οι στήλες της άμμου εξαφανίστηκαν και οι εννέα αριθμοί έλαβαν μεταβλητές τιμές, εξαρτώμενες από τη θέση των σημείων μέσα στον αριθμό, όπως στον προφορικό λόγο και χωρίς την βοήθεια των κουτιών. Όσο για το «μπιντού», μετατράπηκε σε έναν μικρό κύκλο. Επίσης οι Ινδοί δεν είχαν κανένα πρόβλημα να αντιστρέψουν τον τρόπο γραφής τους, προκειμένου να διευκολυνθούν, με αποτέλεσμα ο αριθμός 9.007, για παράδειγμα, να γράφεται ακριβώς όπως και σήμερα.

Ενοποιώντας τις μεγάλες ιδέες της Προσθετικής Αρχής, της Αρχής της Θέσης και του Μηδενός, οι λογιστές όχι μόνο ανακάλυψαν το μοντέρνο λογισμό, αλλά και έκαναν θεωρητικά δυνατό τον εκδημοκρατισμό της τέχνης της λογιστικής που μπορούσε τώρα να διδαχτεί στον καθένα με απλό τρόπο.

Στο ανώτερο αυτό σύστημα αρίθμησης και υπολογισμών των Ινδών χρειάστηκε να πραγματοποιηθεί μια ακόμη ύστατη πρόοδος. Αυτό έγινε στα τέλη του 6ου αιώνα μ.Χ. Σε λιγότερο από μισό αιώνα οι Ινδοί μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν το μηδέν τους με τη σημασία της μηδενικής ποσότητας και τότε το «κουλουράκι» έγινε επιτέλους το σύγχρονο γνωστό σε όλους μας μηδέν.

Σε ένα έργο του, που χρονολογείται από το 628 μ.Χ., ο αστρονόμος Βραχμαπούντα μπόρεσε να διδάξει τις γνωστές μας τέσσερις πράξεις, την ύψωση σε δυνάμεις και την εξαγωγή ριζών μαζί με κάτι εκπληκτικό: Αυτό που ονόμαζε «τα αγαθά», «τα χρέη» και «το τίποτα», δηλαδή τους θετικούς αριθμούς, τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν! Ένας από τους κανόνες του Βραχμαπούντα ( που διέπουν και τη σημερινή άλγεβρα) ήταν ο εξής:

*«Ένα χρέος αφαιρούμενο από το τίποτα γίνεται αγαθό και ένα αγαθό αφαιρούμενο από το τίποτα γίνεται χρέος»*, δηλαδή $(-0)-(-a)=a$ *και* $(-0)+(-a)=-a$

**ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΕΡΧΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ.** Το 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν ήρθε και στην Ευρώπη, ύστερα από 600 χρόνια καθυστέρησης! Οι Άραβες, επηρεασμένοι από τους Ινδούς, υιοθέτησαν αμέσως το σύστημά τους και το διέδωσαν στους γύρω λαούς, προσθέτοντας μάλιστα σε αυτό το θαυμαστό λογισμό δικές τους ανακαλύψεις, ιδιαίτερα σημαντικές. Με την επέκτασή τους στην Ευρωπαϊκή ήπειρο, μετέφεραν και αυτές τις μεθόδους τους. Ο Σαμανίδης Μοχάμεντ Ίμπν Μουσσά αλ-Χοβαρεσμί (από το όνομα του οποίου προέκυψε ο όρος αλγόριθμος) έγραψε δύο δοκίμια τα οποία μεταφέρθηκαν στη Δύση. Όμως κάθε εχέφρων και ορθά σκεπτόμενος Ευρωπαίος που ήθελε να χρησιμοποιήσει ή να μεταδώσει την εκπληκτική αυτή γνώση, χρειαζόταν πολύ περισσότερα από αυτά τα δύο βιβλία. Έπρεπε να βρει έναν τρόπο να αντιμετωπίσει τον τρομακτικό συντηρητισμό της δυτικής θρησκείας που έστελνε στη πυρά όποιον τολμούσε να χρησιμοποιήσει τα σύμβολα των «απίστων», δηλαδή τους αριθμούς 1 έως 9. Τα εμπόδια που όρθωσε ο παραλογισμός του θρησκευτικού συντηρητισμού της Ευρώπης διατηρήθηκαν ως το τέλος του Μεσαίωνα και άρχισαν να αίρονται με τις σταυροφορίες από τις οποίες οι Δυτικοί κατακτητές γύρισαν επηρεασμένοι από την παιδεία των Αράβων. Λίγους αιώνες αργότερα, τα γαλλικά και τα γερμανικά πανεπιστήμια, στα οποία μέχρι τον 14ο και τον 15ο αιώνα μ.Χ. μόλις και μετά βίας διδάσκονταν πρόσθεση και αφαίρεση, την περίοδο 1804 - 1851 (Αναγέννηση) χρησιμοποιούσαν πλέον σταθερά το ινδικοαραβικό σύστημα αριθμητικής, που τελικά θριάμβευσε. Γ. ΠΙΣΚΟΠΑΝΗΣ