

Τα Μαθηματικά στην Ελλάδα του σήμερα

Μιχ. Γ. Μαριάς

Εισαγωγή

Ευχαριστώ τον παλιό μου μαθητή Γ. Παπάζογλου για την πρόσκληση στις εκδηλώσεις του Κολεγίου για την Ημέρα Επαγγελματικής Ενημέρωσης. Οι δεσμοί με το Κολέγιο είναι παλιοί αφού ο γιός μου είναι απόφοιτός του και εκτός του Γιώργου, οι συνάδελφοι Γ. Πέρρος και Κ. Κασάπης είναι παλιοί φίλοι και συνεργάτες.

Θα σας μιλήσω για 'τα Μαθηματικά στην Ελλάδα του σήμερα'. Ίσως ο τίτλος να είναι αρκετά αισιόδοξος για μια εικοσάλεπτη εισήγηση, αλλά ας δούμε τι μπορούμε να πούμε για τα Μαθηματικά.

Θα ξεχωρίσω τρία σημαντικά τους στάδια:

- την **παραγωγή** τους, την παραγωγή δηλαδή νέων Θεωρημάτων και θεωριών. Αυτή είναι η δουλειά των ερευνητών.
- Την **εφαρμογή** τους. Αυτή είναι δουλειά περισσότερων ειδικοτήτων όπως οι Φυσικοί, οι Μηχανικοί, οι Οικονομολόγοι, οι Πληροφορικοί και άλλοι.
- Την **διδασκαλία** τους σε διάφορα επίπεδα.

Την διδασκαλία των Μαθηματικών στις δύο πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης την ξέρετε καλύτερα από μένα αφού την ζείτε μέχρι και σήμερα, ενώ για μένα η αντίστοιχη εμπειρία είναι μια πολύ μακρυνή ανάμνηση. Τη διδασκαλία τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση θα την γνωρίσετε σύντομα και την αφήνω σαν έκπληξη. Έτσι μένει να μιλήσω για την έρευνα στα Μαθηματικά, αφού η εφαρμογή τους όπως ήδη είπα είναι έργο άλλων ειδικοτήτων.

Η έρευνα στα Μαθηματικά

Θα ξεκινήσω με ένα πρωταρχικό ερώτημα: Ποιός θέτει και πώς τίθενται τα ερωτήματα που η απάντησή τους είναι τα νέα Θεωρήματα ή ακόμη καλύτερα σε σπάνιες περιπτώσεις (happy few λένε οι Αγγλοσάξωνες) οι νέες Θεωρίες;

Οι μεγάλες Εικασίες

Θ' αρχίσω με τα "μεγάλα και τα υψηλά". Όπως ξέρουμε σχεδόν όλοι, υπάρχουν διάσημα και άλυτα προβλήματα που παιδεύουν τους μαθηματικούς για χρόνια και αιώνες. Το αρχαιότερο, και ίσως το δυσκολότερο, είναι αυτό που αναφέρεται στην κατανομή των πρώτων αριθμών που είναι γνωστό από την Ελληνική αρχαιότητα και αποτελεί πλέον πρόκληση για τις δυνατότητες του ανθρώπινου μυαλού. Η σύγχρονη εκδοχή του προβλήματος είναι γνωστή και ως εικασία του Riemann και είναι ήδη πάνω από 250 χρόνων!!

Άλλα διάσημα προβλήματα είναι αυτό του Fermat (ισχύει η γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος;) που λύθηκε πριν μερικά χρόνια και η εικασία του Poincaré που ο Perelman διατείνεται πως έλυσε. Όμως, εδώ και δύο χρόνια οι ειδικοί δεν έχουν πεισθεί ακόμα για την ορθότητα της λύσης του παρ' όλο που όλοι

αναγνωρίζουν πως οι μέθοδοί του και τα εργαλεία του έφεραν επαναστατικές καινοτομίες στην διαφορική γεωμετρία.

Εδώ θέλω να σταθώ και να τονίσω πως στην προσπάθεια να λυθούν τα παλιά προβλήματα, εισάγονται νέα ερωτήματα, που η επίλυσή τους απαιτεί νέα εργαλεία και μεθόδους, που ανανεώνουν τις υπάρχουσες θεωρίες, τις κατευθύνουν σε νέους δρόμους ή τις συνδέουν με άλλες υπάρχουσες θεωρίες με τρόπο πρωτόγνωρο.

Μπορούμε να ακούσουμε το σχήμα ενός τυμπάνου;

Θα φύγω από την γενικότητα των μεγάλων εικασιών και θα περιοριστώ σε ένα περιβάλλον προβλημάτων που συνδέονται άμεσα με την δική μου έρευνα. Το γενικό ερώτημα είναι παλιό και διατυπώθηκε πολύ εύστοχα από τον Kac το 1970:

Μπορούμε να ακούσουμε το σχήμα ενός τυμπάνου;

Δηλαδή, ακούγοντας το τύμπανο (ή καλύτερα τους θεμελιώδεις τόνους του τυμπάνου), τι μπορούμε να καταλάβουμε από τα γεωμετρικά του μεγέθη; Από το 1900 περίπου, ξέρουμε ότι μπορούμε ν' 'ακούσουμε' το *εμβαδόν* του και το *μήκος της περιφέρειάς* του.

Φτάσαμε στο αποτέλεσμα αυτό μελετώντας το φαινόμενο της διάχυσης της θερμότητας στο τύμπανό μας. Η διάχυση της θερμότητας είναι ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα των Μαθηματικών και καλό είναι να δούμε λίγο την ιστορία της.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ζούμε σ' ένα δισδιάστατο κόσμο, οπότε η Γή θα ήταν ένας μεγάλος επίπεδος δίσκος. Ενδιαφερόμαστε να γνωρίσουμε την διάχυση της θερμότητας ή την διάδοση των κυμάτων. Αν γνωρίζουμε τα φαινόμενα αυτά και τους νόμους που τα διέπουν, τότε μπορούμε να απαντήσουμε σε πληθώρα ερωτημάτων, άλλα καθαρής μαθηματικής φύσεως και άλλα με μεγάλη συνάφεια με την Φυσική. Ένα από τα διάσημα προβλήματα που απαντήθηκαν μ' αυτό τον τρόπο είναι η χαοτική κίνηση ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου. Αυτά τα προβλήματα και για την περίπτωση του δίσκου, άρχισαν να αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά από τον Fourier την εποχή της μεγάλης Γαλλικής Επανάστασης και απαντήθηκαν οριστικά μέσα στον 19^ο αιώνα.

Αν όμως παραμορφώσουμε την επίπεδη και πάντα δισδιάστατη Γή δημιουργώντας βουνά και πυθμένες ωκεανών, τι γίνεται; Μπορούμε πάντα να βρούμε τους νόμους που διέπουν την διάχυση της θερμότητας σ' αυτήν την νέα γεωμετρική πραγματικότητα; Κι' ακόμα χειρότερα! Αν κάποιος (θεός) τεντώσει τον παραμορφωμένο γήινο δίσκο και τον κάνει άπειρο παραμορφώνοντάς συνεχώς, τι γίνεται;

Εδώ τα πράγματα είναι δύσκολα και ο λόγος είναι απλός. Όλα τα εργαλεία και οι τεχνικές που είχαν αναπτυχθεί για να αντιμετωπισθεί η περίπτωση του επίπεδου δίσκου δεν έχουν καμμία ισχύ για τον παραμορφωμένο και ακόμα χειρότερα για τον άπειρο και παραμορφωμένο. Από ένα επίπεδο σύμπαν περάσαμε πλέον σε ένα καμπυλωμένο. Έπρεπε λοιπόν να αναπτυχθούν νέες θεωρίες για να αντιμετωπιστούν τα παλιά αυτά προβλήματα στο νέο τους γεωμετρικό πλαίσιο. Έγιναν πολλά πειράματα. Τα μοντέλα μας, η σφαίρα και ο υπερβολικός χώρος, ενώ μας κούρασαν αρκετά, έδωσαν απλώς το περίγραμμα μέσα στο οποίο έπρεπε να κινηθούμε αλλά όχι και τον δρόμο που θα μας έδινε απαντήσεις στις γενικές καταστάσεις. Σ' αυτά τα πειράματα χρωστούμε και την ανακάλυψη της στενής σύνδεσης Πιθανοτήτων και Ανάλυσης, την σύνδεση δηλαδή *ντετερμινιστικών* φαινομένων με *μή ντετερμινιστικές* μεθόδους, καταστάσεις που συνήθως εξάπτουν την φαντασία των φίλων Φιλοσόφων.

Όταν επιτέλους ευρέθη η άκρη, για τις Γεωμετρικές καταστάσεις από τον Υαυ και από τον Βαρόπουλο για τις ομάδες, εγώ βρισκόμουν ήδη στην Θεσσαλονίκη. Είχε συμπληρωθεί ήδη χρόνος που προσπαθούσα να μπώ σ' αυτόν τον κύκλο των ιδεών. Όμως τα πράγματα δεν ήταν εύκολα. Έπρεπε να παρακολουθώ το κτίσιμο της νέας θεωρίας μόνος, ενώ στο Παρίσι τα μέλη της υπόλοιπης ομάδας παρακολουθούσαν το Σεμινάριο όπου παρουσιάζονταν οι εξελίξεις της θεωρίας και οι τεχνικές που αναπτύσσονταν, ενώ συγχρόνως ετίθεντο τα νέα προβλήματα που έπρεπε να λυθούν για να συμπληρωθεί το παζλ. Όλα έπρεπε να γίνουν γρήγορα ώστε να μην τα προλάβουν άλλοι. Έτσι κι' έγινε. Από το 85 μέχρι τις αρχές του 90 είχε συμπληρωθεί το πρώτο και ίσως το σημαντικότερο στάδιό της.

Η καθημερινότητα του ερευνητή (σε πρώτο πρόσωπο)

Για να ανταπεξέλθει κάποιος σε τέτοιου είδους καταστάσεις και να ενσωματωθεί στην ομάδα χρειάζονται ορισμένα πράγματα. Πρώτα απ' όλα ψυχραιμία. Δεύτερον, σκληρή δουλειά και τρίτον δικές σου ιδέες. Αυτές θα σου εξασφαλίσουν ένα είδος ασυλίας και θα σου επιτρέψουν να δουλέψεις χωρίς να αισθάνεσαι πίσω σου την καυτή ανάσα του ανταγωνιστή σου. Τα αντεπιστέλοντα μέλη ερευνητικών ομάδων όπως ήμουν εγώ, δεν έχουν την δυνατότητα να δουλέψουν σε 'τρέχοντα' θέματα. Αυτά τα κοιτάζουν οι προσκείμενοι, που πρώτοι τα αντιλαμβάνονται και είναι κάτοχοι των εν εξελίξει τεχνικών για να τα διαπραγματευτούν.

Η ιδέα όμως είναι ένα μυστηριώδες προϊόν εννοήσεως και δυστυχώς δεν έρχεται κατά παραγγελία ούτε πουλιέται πουθενά. Για να φτάσει εκείνη η ευλογημένη στιγμή, αν κάποτε φτάσει, προηγούνται πολλά. Πρέπει να καταλάβεις το πρόβλημα και το περιβάλλον του. Να δοκιμάσεις στρατηγικές για την επίλυσή του. Έπειτα ξαπλώνεις ώρες αμίλητος στον καναπέ με την στιφή γεύση της απογοήτευσης στα χείλη και προσπαθείς να καταλάβεις γιατί η κοπιώδης προσπάθεια των τελευταίων εβδομάδων απέτυχε πάλι. Σημειώνεις που σπάζει το πράγμα για να το αποφύγεις στην νέα προσπάθεια. Οι λογαριασμοί μερικές φορές είναι τρομακτικοί και πιθανότατα θα ξαναπέσεις σ' άλλους, το ίδιο εξοντωτικούς. Ξυπνώ πρωί και στις εξήμισυ είμαι στο μπαλκόνι με καφέ, μολύβι και χαρτί. Μέχρι να πιάσει η ζέστη και να ζητήσω την δροσιά του αirkοντίσιον. Μέχρι το βράδυ. Και την επόμενη πάλι τα ίδια. Αν η Πόλυ ήταν άλλη θα με είχε πετάξει έξω εδώ και καιρό, όπως έγινε και γίνεται σε πληθώρα ομοτέχνων. Ευτυχώς, εδώ στάθηκα τυχερός.

Πάλι καναπές και στιφή γεύση. Αφήνω το μυαλό να ξεστρατήσει. Ας ασχοληθώ με κάτι άλλο. Τότε, φαίνεται, πως στο πίσω μέρος του μυαλού αρχίζει μια άλλη επεξεργασία του προβλήματος. Υπόγεια. Και μερικές φορές, σε ώρα ανύποπτη, έχεις μια νέα ιδέα που λύνει το μυστήριο. Άλλες φορές έρχεται γρήγορα, πριν ακόμα καταλαγιάσει η προσπάθεια, κι' άλλες μετά από μήνες. Πάντα της δίνω ένα όνομα, που την προσδιορίζει. Η ιδέα της 'μπουγάτσας', του 'καναπέ' ή του 'Champions League'. Όποιο και νάναι το όνομα της, πέφτει σαν ευλογία. Η θολούρα ξεκαθαρίζει, οι λογαριασμοί γίνονται αγόγγιστα και κάθε κίνηση συμφωνεί και δένει αρμονικά με την προηγούμενη. Όλα φαίνεται πως υπακούουν σε μια κρυμμένη επιταγή.

Αυτή είναι η καθημερινότητα ενός ερευνητή στα Μαθηματικά. Ή τουλάχιστον, έτσι την βίωσα αρκετές φορές τα είκοσιπέντε χρόνια που προσπαθώ να αποδείξω κάποιο θεώρημα. Η κατάσταση μυρίζει ιδρώτα και οι αγωνίες είναι πολλές. Ίσως είναι και μιά από τις αιτίες που στον κλάδο μας κυκλοφορούν πολλοί σφυριγμένοι.

Την κατάσταση αυτή επισημαίνει και ο μεγάλος Κ. Π. Καβάφης στο ποίημά του, 'Σοφοί δε Προσιόντων':

*Εκ των μελλόντων οι σοφοί τα προσερχόμενα αντιλαμβάνονται.
Η ακοή αυτών κάποτε εν ώραις σοβαρών σπουδών ταράττεται
Η μυστική βοή έρχεται των πλησιαζόντων γεγονότων
Και την προσέχουν οι ευλαβείς.*

Είναι σ' εκείνο το

'κάποτε εν ώραις σοβαρών σπουδών'

που ήθελα να επιμείνω.

Οι σοφοί, που εγώ τουλάχιστον γνώρισα, αγωνίζονται με την ένταση που σας διηγήθηκα παραπάνω. Και κάποτε....

Αδιάψευστος μάρτυρας μου είναι και το σχετικό ανέκδοτο που κυκλοφορεί για τον J.P. Serres, έναν από τους μεγαλύτερους Μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα. Ο Serres λοιπόν, καλλιέργησε τον μύθο του ιδιοφυούς επιστήμονα που ασχολείται ελάχιστα με το αντικείμενό του και που ότι κάνει είναι προϊόν επνεύσεως και αστείρευτου ταλέντου. Κυκλοφορεί στις μαθηματικές συναθροίσεις με μια εφημερίδα υπό μάλης την οποία πολλές φορές διαβάζει κατά την διάρκεια των διαλέξεων. Όταν μάλιστα κάποτε ρωτήθηκε πότε και πόσο ασχολείται με τα Μαθηματικά, η απάντηση ήταν *'λίγο και σχεδόν ποτέ'*. Όταν όμως έγινε η ίδια ερώτηση στην γυναίκα του, η απάντηση ήταν *'Πάντα! Δεν ασχολείται με τίποτε άλλο'*.

Δύο ερωτήματα

Θα τελειώσω δύο ερωτήματα.

1. *Προς τι αυτού του είδους τα αφηρημένα και θεωρητικά Μαθηματικά; Έχουν κάποια ελπίδα εφαρμογής;*

Η απάντηση δεν μπορεί να είναι καταφατική ή αρνητική. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι άκρως διαφωτιστικό. Ήδη οι αρχαίοι Έλληνες έθεσαν το περίφημο *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*:

Ποιά από τις κλειστές καμπύλες μήκους 1, περιέχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Και ήξεραν και την απάντηση. Ο κύκλος! Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχτηκε το 1860 και μάλιστα το 1985 ο Βαρόπουλος έδειξε ότι έχει άμεση σχέση με την διάδοση της θερμότητας! Λίγο πριν, είχε χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την ενέργεια που απαιτείται για να κρατιέται το μοναδικό ηλεκτρόνιο του υδρογόνου σε τροχιά γύρω από τον πυρήνα του.

2. *Ποιά άραγε είναι η ανταμοιβή του ερευνητή για όλες αυτές τις προσπάθειες και τις θυσίες;*

Θα απαντήσω πάλι μετα λόγια του Καβάφη. Η εύρενα στα Μαθηματικά δεν προσφέρει 'Σατραπείες' και τέτοια. Μερικές φορές, λίγα δύσκολα 'εύγε' και η εκτίμηση των συναδέλφων και μαθητών του δίνουν κουράγιο.

Η έρευνα στην Ελλάδα του σήμερα

Στη τελευταία αυτή παράγραφο θα προσπαθήσω να παρουσιάσω την *έρευνα στα μαθηματικά που γίνεται στην Ελλάδα*. Έτσι υπερασπίζεται και η διδασκαλία, αφού είναι από παλιά γνωστό ότι η ποιότητα της διδασκαλίας στα Πανεπιστήμια ακολουθεί την έρευνα σαν σκιά.

Τα πράγματα για τα Μαθηματικά στην Ελλάδα άρχισαν να γυρίζουν στα τέλη της δεκαετίας του 70. Τότε ολοκληρώνεται η αποχώρηση της παλιάς φρουράς των καθηγητών. Η δίνη και τα απόνερα της μεταπολίτευσης, δεν εμπόδισαν ορισμένους από τους νέους καθηγητές να συγκροτήσουν ερευνητικές ομάδες ή να σπρώξουν τους καλούς φοιτητές για μεταπτυχιακά στο εξωτερικό. Το 77 αρχίζει να λειτουργεί το Πανεπιστήμιο Κρήτης και το Μαθηματικό στο Ηράκλειο κτίζεται πάνω σε στέρες βάσεις. Εξ άλλου, την δεκαετία του 70 η αίγλη των ειδικοτήτων του Πολυτεχνείου είχε πια ξεθωριάσει. Είχαμε πιο πολλούς μηχανικούς απ' ότι χρειαζόμασταν. Έτσι τα Πολυτεχνεία σταμάτησαν να απορροφούν όλο τον αφρό και γνήσια ταλέντα είχαν πλέον σαν πρώτη επιλογή τις βασικές επιστήμες. Μάλιστα είχαμε και μερικές θεαματικές επιστροφές. Μερικοί από τους πιο εκλεκτούς μας συνάδελφους είναι απόφοιτοι πολυτεχνείων που βρήκαν τον δρόμο τους στα μαθηματικά.

Η προσπάθεια αυτή απέδωσε και σήμερα στην χώρα μας υπάρχουν πολλοί πανεπιστημιακοί δάσκαλοι που είναι και δραστήριοι ερευνητές. Η έρευνα που γίνεται είναι σοβαρή και δεν έχει τον περιστασιακό χαρακτήρα του παρελθόντος. Την ποιότητα αυτή την πιστοποιεί η παρουσία των ερευνητών των Ελληνικών πανεπιστημίων σε όλα ανεξαιρέτως τα καλά περιοδικά του εξωτερικού και μάλιστα με ικανό αριθμό άρθρων. Ενδεικτικά αναφέρω μόνο δύο περιπτώσεις. Την πενταετία 1997-2001, εμφανίστηκαν 12 άρθρα στο *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (δες τον cumulative index to volumes 121-130, στον τόμο 131, τεύχος 3, Νοεμ. 2001) και 13 στο περιοδικό της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρίας *Transactions of the American Mathematical Society* την πενταετία 1996-2000, (δες τους author index of the volumes 348-352 of the TAMS). Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι τα μαθηματικά είναι σκληρή επιστήμη και δεν επιτρέπει την μαζική παραγωγή άρθρων. Ένα μαθηματικό πρόβλημα για να λυθεί απαιτεί πρωτότυπες ιδέες, παιδεία, προσήλωση (πολλές φορές σχεδόν απόλυτη), κόπο και χρόνο. Αλλιώς δεν είναι ενδιαφέρον. Αυτή η κατάσταση είναι που κάνει τους μαθηματικούς να φαίνονται πως 'ζουν στον κόσμο τους' για να χρησιμοποιήσω μια προσφιλή έκφραση των φοιτητών μας.

Μια πιο προσεκτική ματιά θα δείξει ότι ένα ποσοστό της έρευνας αυτής, γίνεται σε γνωστικά πεδία υψηλού ενδιαφέροντος και κατά συνέπεια ανταγωνιστικά και δύσκολα. Τα λεγόμενα σκληρά Μαθηματικά έκαναν την εμφάνισή τους και στην Ελλάδα και ίσως άρχισαν να εγκλιματίζονται. Η άνεση του περιθωρίου και των μετόπισθεν, φαίνεται πως δεν είναι πια στις προτιμήσεις αρκετών Μαθηματικών. Και όλα αυτά χωρίς σχεδόν καμία ενίσχυση από ερευνητικά κονδύλια αφού η βασική έρευνα δεν πριμοδοτείται στην χώρα μας, όπως πολύ σωστά επισημαίνει και η Καθημερινή. Φαίνεται πως οι πιο πολλοί \square *κάνουν Μαθηματικά για την ψυχή τους* \square

για να θυμηθώ τον φίλο και συνάδελφο Μ.Πετράκη.

Θα τελειώσω αναφέροντας μια παλιά, αλλά πάντα επίκαιρη, συζήτηση που είχα με τον αείμνηστο Στέλιο Πηχωρίδη, τον άνθρωπο με την σημαντικότερη ίσως συνεισφορά στην προσπάθεια αναγέννησης της Μαθηματικής παιδείας στον τόπο μας. 'Η Ελλάδα δεν είναι μητροπολιτική χώρα. Δεν μπορεί να αναπτύξει έρευνα και τεχνολογίες αιχμής σε όλους τους τομείς. Ας δούμε τις ανάγκες και τις δυνατότητες μας και ας κινηθούμε ανάλογα. Όμως, σε ένα ή δύο τομείς, μπορούμε να είμαστε πολύ ψηλά, χωρίς μάλιστα μεγάλες δαπάνες. Θα είναι πολλαπλά χρήσιμο. Δεν ξέρω ποιον θα επιλέξουν. Θα είναι τα Μαθηματικά, η Φιλοσοφία, η Φιλολογία, Αρχαιολογία; Δεν ξέρω. Δεν είναι όμως σωστό οι έγκυρες εκδόσεις των αρχαίων να είναι της Οξφόρδης, της Λειψίας ή του Παρισιού'.

Θεσσαλονίκη 26.03.05