**ΛΟΓΟΙ** ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ:

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 1, Number 6, November 1979

**RATIO IN EARLY GREEK MATHEMATICS**

**BY D. H. FOWLER**

**Contents**



**Στα παρακάτω θα αναφερθούμε σε μερικά μόνον σημεία του άρθρου.**

**Επίσης υπάρχουν αποσπάσματα από το έργο: «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» Τόμος Ι: Από τον Θαλή στον Ευκλείδη του Sir Thomas Heath έκδοση του Κ.Ε.ΕΠ. ΕΚ , Αθήνα 2001**

**1, Introduction.**

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Υπάρχουν δύο είδη αριθμητικής, αυτό για τον λαό και αυτό για τους φιλοσόφους;… Και τι λες για τις τέχνες του υπολογισμού και της μέτρησης όπως χρησιμοποιούνται στην οικοδόμηση και στο εμπόριο σε σύγκριση με τη φιλοσοφική γεωμετρία και των περίτεχνων υπολογισμών;. Θα έπρεπε να μιλάμε για καθένα από αυτά για ένα ή δύο;
PROTARCHUS: Πρέπει να πω ότι κάθε ένας από αυτούς ήταν δύο.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι, **πριν** την ανακάλυψη του πιο αποτελεσματικού ορισμού 5 στο βιβλίο V των στοιχείων του Ευκλείδη από τον Εύδοξο, η θεωρία των λόγων, όχι των αναλογιών, βασιζόταν στην διαδικασία της ανθυφαίρεσης (ο λεγόμενος αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του Μ.Κ.Δ δύο ακεραίων). Μετά όμως τον ορισμό 5 φαίνεται ότι η ανθυφαίρεση ξεχάστηκε.

**2.** ***Arithmetike*** **and** ***logistike*****.**
Μέσα στην ελληνική κλασσική μαθηματική παράδοση, ο αριθμός (arithmos) πάντα δείχνει έναν θετικό ακέραιο αριθμό, συχνά αποκλείοντας την μονάδα, και η αριθμητική (arithmetike) αντιστοιχεί στη δική μας θεωρία των αριθμών, αν και αυτές οι λέξεις έχουν μια πιο συγκεκριμένη αίσθηση από τη χρήση του δικού μας «αριθμού», που περισσότερο συνδέεται με την διαδικασία της μέτρησης και υπονοούν την ύπαρξη των πραγμάτων, ενδεχομένως εξιδανικευμένες μονάδες, που μετριούνται, όπως με τις αγγλικές λέξεις 'couple', 'trio', 'dozen', κ.λ.π.

Η χρήση του ratio (logos) δύο αριθμών εμφανίζεται στις πιο άτυπες αποδείξεις του Αρχιμήδη αλλά δεν υπάρχει καμία επιζούσα προσπάθεια να ενσωματωθεί ο χειρισμός των κλασμάτων μέσα σε μια τυπική επεξεργασία. Στα στοιχεία του Ευκλείδη, παραδείγματος χάριν, υπάρχει περιστασιακή χρήση «των μισών» ή «των τρίτων», όπως στο I, 47, και XII, 10, αλλά ρητές διαδικασίες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των λόγων δύο αριθμών δεν εξετάζονται ποτέ.

**[Από το βιβλίο του Heath**:

Η Αριθμητική για τον Πλάτωνα δεν είχε το σημερινό νόημα, αλλά σήμαινε την επιστήμη που μελετά τους αριθμούς καθαυτούς, με άλλα λόγια τη Θεωρία των Αριθμών. Ωστόσο, ο Πλάτων δεν αγνοεί την τέχνη του υπολογισμού (η αριθμητική με το σημερινό νόημα της). Αναφέρεται στον αριθμό και στον υπολογισμό (αριθμόν *και λογισμόν)* και παρατηρεί ότι "η τέχνη των υπολογισμών *(λογιστική)* και η *αριθμητική* ασχολούνται αμφότερες με τον αριθμό.
Γενικά, όσοι διαθέτουν ένα φυσικό χάρισμα για υπολογισμούς (οι *φύσει λογιστικοί)* έχουν ταλέντο για τη μάθηση κάθε είδους, ενώ ακόμη και οι βραδύνοες, οξύνουν το πνεύμα τους, αν ασκηθούν στους υπολογισμούς. Όμως, η τέχνη του υπολογισμού *(λόγιστική)* απλώς προπαρασκευάζει για την αληθινή επιστήμη. Όσοι πρόκειται να κυβερνήσουν την πόλη πρέπει να κατανοήσουν τη *λογιστική* όχι με την ευρεία έννοια της χρησιμοποίησης της στις εμπορικές συναλλαγές, αλλά μόνο χάρη ητς γνώσης, έως ότου είναι σε θέση να συλλάβουν την έννοια του αριθμού καθαυτή μέσω της σκέψης, και μόνο. Η διάκριση μεταξύ *αριθμητικής* (Θεωρίας Αριθμών) και λογιστικής (τέχνης του υπολογισμού) υπήρξε θεμελιώδης στα ελληνικά Μαθηματικά. Ο Πλάτων την αναφέρει και σε άλλο έργο του, και είναι σαφές ότι στην εποχή του ήταν πλέον καθιερωμένη. Επίσης, και ο Αρχύτας αναφέρει τη *λογιστική* με την ίδια έννοια. Η τέχνη του υπολογισμού, γράφει, φαίνεται ότι υπερτερεί αρκετά σε σχέση με τις άλλες τέχνες ως προς τη σοφία ή τη φιλοσοφία- μάλιστα μοιάζει να αποσαφηνίζει τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται καλύτερα και απ' ό,τι η Γεωμετρία. Επίσης, συχνά επιτυγχάνει εκεί που η γεωμετρία αποτυγχάνει. Ωστόσο, μόνο οι μεταγενέστεροι συγγραφείς οι οποίοι ασχολήθηκαν με την ταξινόμηση των Μαθηματικών, υπεισέρχονται, *σε* λεπτομέρειες σχετικά με το τι περιλαμβάνει η *λογιστική. Η* Αριθμητική, λέει ο Γεμίνος, αποτελείται από τη θεωρία των γραμμικών αριθμών, από τη θεωρία των επίπεδων αριθμών και από τη θεωρία των στερεών αριθμών. Η Αριθμητική ερευνά τους αριθμούς, και μέσω αυτών, τα είδη του αριθμού καθώς εξελίσσονται διαδοχικά από τη μονάδα, το σχηματισμό των επίπεδων αριθμών, των όμοιων και των ανόμοιων, και την περαιτέρω εξέλιξη προς την τρίτη διάσταση. Σε ότι αφορά τη λογιστική, δεν εξετάζει τις ιδιότητες των αριθμών, αλλά τη σχέση τους με αισθητά αντικείμενα. Και για αυτό το λόγο, τους δίνει ονόματα τα οποία προέρχονται από μετρούμενα αντικείμενα, όπως *μηλίτης* (από το *μήλον,* δηλαδή το πρόβατο ή τον καρπό της μηλιάς, πιθανότατα το δεύτερο) *φιαλίτης* (από τη *φιάλη).* Ο σχολιαστής στο *Χαρμίδη* αναφέρεται σε αυτά περισσότερες λεπτομέρειες:
"Η λογιστική είναι η επιστήμη που πραγματεύεται τα αριθμημένα αντικείμενα και όχι τους αριθμούς. Δεν εξετάζει τον αριθμό ως προς την ουσία του, αλλά θεωρεί τον 1 ως μονάδα και το αριθμημένο αντικείμενο ως αριθμό, π.χ. θεωρεί τον 3 ως μια τριάδα, τον 10 ως μια δεκάδα, και εφαρμόζει τα θεωρήματα της αριθμητικής σε τέτοιες (ειδικές) περιπτώσεις. Έτσι, είναι η λογιστική που ερευνά από τη μια αυτό που ο Αρχιμήδης ονόμασε βοεικό πρόβλημα, και από την άλλη τους *μηλίτες* και *φιαλίτες* αριθμούς, από τους οποίους οι τελευταίοι σχετίζονται με φιάλες και οι πρώτοι με

πρόβατα (πιθανότατα θα έπρεπε να είχε γράψει "μήλα"). Επίσης, αναφορικά με άλλα είδη η λογιστική ερευνά τους αριθμούς αισθητών σωμάτων αντιμετωπίζοντας τα ως ιδεατά (ως *περί* τελείων). Αντικείμενο της μελέτης της είναι οτιδήποτε είναι αριθμημένο. Οι κλάδοι της περιλαμβάνουν τις λεγόμενες ελληνικές και αιγυπτιακές μεθόδους για πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις , τις προσθέσεις και τις αναλύσεις κλασμάτων, καθώς και τις μεθόδους για την εξερεύνηση της θεωρίας των τρίγωνων και πολυγώνων αριθμών αναφορικά με το αντικείμενο μελέτης ειδικών προβλημάτων."

Το μεγαλύτερο μέρος των περιεχομένων της *λογιστικής* καθίσταται σαφές από τα παραπάνω. Η Αριθμητική περιελάμβανε κατά πρώτον τις συνηθισμένες αριθμητικές πράξεις, δηλαδή την πρόσθεση, την αφαίρεση και το χειρισμό κλασμάτων. Με άλλα λόγια, περιελάμβανε τα στοιχειώδη μέρη του αντικειμένου το οποίο σήμερα είναι γνωστό ως *αριθμητική*. Δεύτερον, ασχολούνταν με προβλήματα σχετικά με πρόβατα (ή μήλα), με φιάλες κτλ. Εδώ αναγνωρίζουμε εύκολα τέτοια προβλήματα, καθώς τα συναντάμε στα αριθμητικά επιγράμματα που περιλαμβάνει η Ελληνική ανθολογία. Αρκετά από αυτά αφορούν τη διανομή ενός αριθμού μήλων ή καρυδιών σε συγκεκριμένο πλήθος ανθρώπων. Άλλα πραγματεύονται τα βάρη φιαλών ή ανδριάντων και των βάθρων τους κτλ. Κατά κανόνα, τα προβλήματα έχουν σχέση με την επίλυση απλών εξισώσεων με έναν άγνωστο ή με την επίλυση εύκολων συστημάτων εξισώσεων με δύο αγνώστους. Υπάρχουν και δύο απροσδιόριστες εξισώσεις πρώτου βαθμού με ακέραιη θετική λύση. Από τις νύξεις του Πλάτωνα σχετικά με αυτά τα προβλήματα προκύπτει σαφώς ότι η προέλευση τους ανάγεται τουλάχιστον στον 5ο αιώνα π.Χ. Το αποδιδόμενο στον Αρχιμήδη βοεικό πρόβλημα είναι βεβαίως ένα κατά πολύ δυσκολότερο πρόβλημα σε σχέση με τα παραπάνω, το οποίο περιλαμβάνει την επίλυση μιας εξίσωσης του Pell, της οποίας οι λύσεις είναι εξαιρετικά μεγάλοι αριθμοί.

Στε.: Ως εξίσωση του Pell χαρακτηρίζεται κάθε διοφαντική εξίσωση της μορφής $x^2 - \alpha y^2 = 1$, όπου α θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Ειδικές περιπτώσεις της έχουν αντιμετωπισθεί στα έργα των Πυθαγορείων και του Αρχιμήδη. Ο Fermat (17ος αιώνας) εισήγαγε τη γενική μορφή της εξίσωσης του Pell.
Στμ.: 1ος - 2ος μ.Χ. αιώνας.

(Στην συνέχεια αναφέρεται στον Διόφαντο) ]

Για τα κλάσματα: Κατά τη διάρκεια της πρόωρης κλασσικής περιόδου οι Έλληνες χειρίστηκαν τα κλάσματα όπως οι Αιγύπτιοι, με την έκφραση των κυρίων κλασμάτων (με εξαίρεση το 2/3) ως τα αθροίσματα των υποπολλαπλασίων τους (π.χ. 3/4 = 1/2 + 1/4). Ενώ δεν φαίνεται να υπάρχει οποιαδήποτε πρόωρη θεωρητική κατανόηση των άλλων διαδικασιών στα κλάσματα, η αντιστροφή (reciprocation) (που περιγράφουν προτάσσοντας το hypo) και τα epimoric κλάσματα (μ·ν + μ)/μ·ν φαίνεται ότι ήταν γνωστά.

### 3. The notion of ratio.

Είναι περίεργο και ανεξήγητο γεγονός ότι στα Στοιχεία δεν περιέχεται ένας ακριβής ορισμός για τον λόγο, παρότι η λέξη λόγος χρησιμοποιείται συχνά. Στο Book V, Definition 3 τον εισάγει ως εξής:

**A ratio *{logos)* is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind,**

**[Αν δύο ομοειδή μεγέθη συγκριθούν μεταξύ τους, τότε υπάρχει πάντοτε μια σχέση που προκύπτει από ην σύγκριση του ενός με το άλλο, που λέγεται λόγος των δύο αυτών μεγεθών]**
αλλά το νόημά του καθορίζεται στον περίφημο ορισμό 5 όπου στην πραγματικότητα εξετάζεται η ισότητα δύο λόγων.

O Definition 6 τότε εισάγει αναδρομικά μια εναλλακτική ορολογία:

«Let [four] magnitudes which have the same ratio be called proportional *(analogon)»,* και στο Book V προχωράει στην μελέτη της αναλογίας ανάμεσα στις ποσότητες.

So proportionality is a relationship that may or may not hold or be relevant.

[Γενικά, στα Στοιχεία, ο λόγος αποκτά νόημα ενταγμένος σε μια αναλογία]

Για να δώσουμε έμφαση στην διαφορά μεταξύ λόγου και αναλογίας: αν δοθούν τέσσερα αντικείμενα a, *b,* c, and *d,* μπορούμε πάντα να απαντήσουμε είτε: «Ναι είναι σε αναλογία» ή « Όχι δεν είναι σε αναλογία» ή « Η ιδέα της αναλογίας δεν ταιριάζει (αν τα a, *b ή τα c* and *d δεν μπορούν να συγκριθούν [αν δεν είναι ομοειδή]).* Η διαδικασία του βιβλίου V δεν προσδιορίζει νόημα για τους λόγους to *a:b* and *c:d* ξεχωριστά και κατόπιν βεβαιώνει ότι είναι ίσοι. Για αυτό τον λόγο θα χρησιμοποιήσουμε την συντομογραφία *a:b::c:d* για τις αναλογίες παρά την *a:b = c:d.* Ένας λόγος είναι ένα ανεξάρτητο νόημα για το *a:b* και, στους περισσότερους χειρισμούς, ακολουθεί έναν ορισμό της αναλογίας και αντιστοιχεί σε μια «κλάση ισοδυναμίας». Αυτό το βήμα δεν έχει νόημα στα Στοιχεία. Σε αυτά δεν προτείνεται κανένας εναλλακτικός ορισμός για τον λόγο στα Στοιχεία εκτός από τον ορισμό 3 στο βιβλίο V και έτσι οι λόγοι μπορούν μόνο να εξεταστούν μέσα σε μια αναλογία.

Παρακάτω θα δούμε ότι πριν την θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, υπήρχε ένας ορισμός για τον λόγο (μέσω της ανθυφαίρεσης)].

## 4. Multiplication and addition of ratios.

Πράξεις που αντιστοιχούν στο πολλαπλασιασμό των κλασμάτων εμφανίζονται μέσα στα Στοιχεία, με επεξεργασίες που αξίζουν επεξήγησης.
Αρχικά παρατηρούμε ότι αν και η ιδέα του γινομένου δύο λόγων ποτέ δεν ορίζεται- ούτε θα μπορούσε αυτό να γίνει δεδομένου ότι ο λόγος ο ίδιος δεν ορίζεται , αλλά μόνο η ισότητα δύο λόγων-η πράξη χρησιμοποιείται στην πρόταση VI, 23:

*Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των γινομένων των πλευρών τους.*

Η ορολογία καθορίζεται σε έναν αλλοιωμένο Ορισμό 5 του ίδιου βιβλίου:

*Ένας λόγος λέγεται ότι αποτελείται από λόγους όταν οι λόγοι αυτοί πολλαπλασιαζόμενοι μεταξύ τους σχηματίζουν λόγο.*

αλλά αυτό είναι μόλις και μετά βίας ρητό. [Ο ορισμός αυτός είναι αμφίβολος για την γνησιότητά του και γενικά δεν χρησιμοποιείται στα στοιχεία. Κατά τον Heath είναι προβληματικός ]

Σε κανένα σημείο των Στοιχείων, ή και σε άλλα κείμενα, δεν βρίσκουμε οτιδήποτε που να σχετίζεται με μια τυπική θεώρηση της πρόσθεσης λόγων.
Γιατί τότε δεν βρίσκουμε μέσα σε αυτά τα βιβλία μια λογιστική θεώρηση με τις βασικές πράξεις των λόγων; Μια τέτοια ερώτηση δεν είναι έξω
εκτός τόπου, δεδομένου ότι βρίσκουμε στον Euclid απόπειρες να εισαχθούν κάποιοι από αυτούς τους χειρισμούς . Θα δώσουμε μια εξήγηση στην §9, όπου θα δούμε ότι αυτό που θα απαιτείτο για ένα τέτοιο βιβλίο θα βρισκόταν πολύ μακριά και έξω από το πεδίο των ελληνικών μαθηματικών.

**5. Pre-Eudoxian uses of incommensurable magnitudes and proportion theory.**

**6.Anthypfairesis.** The 'Euclidean' subtraction algorithm

***Ανθυφαίρεση***

Η *ανθυφαίρεση* αποτελεί τη βάση της Θεωρίας Αριθμών των βιβλίων VII–IX. Ως *ανθυφαίρεση* ορίζεται η εξής διαδικασία: Αν δίνονται δύο αριθμοί $\alpha > \beta$, τότε θεωρούμε τη βέλτιστη προσέγγιση του $\alpha$ από τον $\beta$ ως προς την πρόσθεση (ουσιαστικά διαιρούμε (μετράμε) τον $\alpha$ με τον $\beta$) και απομένει υπόλοιπο $\upsilon < \beta$. Κατόπιν συνεχίζουμε διαιρώντας τον $\beta$ με το $\upsilon$, οπότε έχουμε υπόλοιπο $\upsilon_1 < \upsilon$ και μετά διαιρούμε το $\upsilon$ με το $\upsilon_1$ κ.ο.κ.

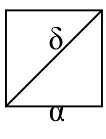
Η έννοια της *ανθυφαίρεσης* χρησιμοποιεί τη γνωστή μας διαίρεση ως έννοια ήδη γνωστή ή αλλιώς αυτονόητη, η οποία ωστόσο χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του ΜΚΔ, όπως και στη σύγχρονη ορολογία.

Η *ανθυφαίρεση* χρησιμοποιεί διαδοχικά τον ***ευκλείδειο αλγόριθμο*** της διαίρεσης καταλήγοντας στον ορισμό και υπολογισμό του ΜΚΔ, στην επίλυση της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης (αντίστροφη διαδικασία) και στην επίλυση της γραμμικής ισοτιμίας πρώτης τάξης, όπως αυτά συμπεριλαμβάνονται σε κάποιο σύγχρονο βιβλίο Θεωρίας Αριθμών.

[Από το βιβλίο: Ευκλείδη «Στοιχεία» τόμος 2 έκδοση Κ.Ε. ΕΠ.ΕΚ Αθήνα 2001]

**7. Anthyphairesis and the discovery of incommensurability.**

[ Παραθέτω την ανθυφαίρεση της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου όπως την διδάσκει ο καθηγητής Στυλιανός Νεγρεπόντης (παραλείπω την οπτική των Γνωμόνων) :




$\delta^2 = 2\alpha^2$ (από το ισοσκελές Π.Θ.)
$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$
$\delta^2 - \alpha^2 = \alpha^2$

Αφού $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, προφανώς $\delta^2 > \alpha^2$ , άρα $\delta > \alpha$
Συνεπώς υπάρχει (Ι.3) ευθύγραμμο τμήμα $\gamma_1$: $\delta = \alpha + \gamma_1$
Όμως τότε $\delta^2 = \alpha^2 + \gamma_1^2 + 2\alpha\,\gamma_1$ (ΙΙ. 4)
άρα (αφού $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$) παίρνουμε
$\alpha^2 = \gamma_1^2 + 2\alpha\,\gamma_1$, οπότε $\alpha^2 > \gamma_1^2$ και $\alpha > \gamma_1$
Άρα το πρώτο βήμα της ανθυφαίρεσης των α, δ είναι:

**$\boldsymbol{\delta = \alpha + \gamma_1}$ , με $\boldsymbol{\alpha > \gamma_1}$**

Επίσης $α^2 > 2α γ_1$ συνεπώς $α > 2 γ_1$
Θα υπάρχει τότε $γ_2$ : $α = 2 γ_1 + γ_2$. Από $α^2 = γ_1^2 + 2α γ_1$
παίρνουμε $(2 γ_1 + γ_2)^2 = γ_1^2 + 2(2 γ_1 + γ_2) γ_1$
και (ΙΙ.8) $4γ_1^2 + γ_2^2 + 4 γ_1 γ_2 = γ_1^2 +4 γ_1^2 + 2 γ_1 γ_2$
και τελικά $γ_1^2 = γ_2^2 + 2 γ_1 γ_2$, οπότε $γ_1 > γ_2$
Άρα το δεύτερο βήμα της ανθυφαίρεσης είναι:
**$α = 2 γ_1 + γ_2$, με $γ_1 > γ_2$**

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:
**Ανθ(δ, α) = [1, 2, 2, 2, …..]**
Σύμφωνα όμως με την Πρόταση Χ.2, αφού η ανθυφαίρεση των δύο αυτών μεγεθών είναι άπειρη σημαίνει ότι τα μεγέθη είναι ασύμμετρα (δηλαδή δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρηση)
Συνεπώς οι Πυθαγόρειοι φαίνεται να ανακάλυψαν την ασυμμετρία διαμέτρου προς πλευρά μέσω αυτής της ανθυφαίρεσης.
Ο κ. Νεγρεπόντης πιστεύει ότι προηγήθηκε η ενασχόλησή τους με την μουσική.

Είναι όμως καλή αυτή η ανακατασκευή της ασυμμετρίας;
Μήπως τα πράγματα έγιναν όπως παρακάτω; :

Αν $α^2 = 2β^2$ θα δείξω ότι α, β ασύμμετρα.
Πράγματι, έστω ότι δεν ήταν ασύμμετρα και έστω $α/β = γ/δ$ με $(γ, δ) = 1$
Τότε: $α^2/β^2 = γ^2/δ^2$, οπότε $2 δ^2 = γ^2$ , άτοπο.(όπως το λέμε σήμερα)
<u>Γιατί να μην ήταν αυτή η απόδειξη;</u>
Καταρχήν, ήταν γνωστή αυτή η απόδειξη:
Ο Αριστοτέλης την αναφέρει συχνά. (άρτιοι – περιττοί)
Επίσης οι αρχαίοι είχαν προσθέσει μια πρόταση (την Χ.117) με μια παρόμοια απόδειξη.
Ωστόσο:
**Αυτή η απόδειξη δεν παραπέμπει σε απειρία** (από πουθενά δεν προκύπτει)
Έπειτα: (από πρόταση Χ.2) η ασυμμετρία συνδέεται με την άπειρη ανθυφαίρεση και δεν ξέρουμε κανέναν άλλο τρόπο να συνδέσουμε την απειρία παρά με την ανθυφαίρεση. Δεν θα λέγανε στον Ιππασο ότι θα πνιγεί σε μια θάλασσα απειρίας.

Επίσης: Ο Θεόδωρος αποδείκνυε στον Θεαίτητο (100 χρόνια μετά τους Πυθαγόρειους) την ασυμμετρία των $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$
Δεν άρχιζε από το $\sqrt{2}$ αλλά από το $\sqrt{3}$ , που σημαίνει ότι το $\sqrt{2}$ ήταν γνωστό.
Θα μπορούσε να το είχε κάνει με άρτιους- περιττούς.
Άρα αν ξέρανε τον τρόπο άρτιοι – περιττοί θα τον εφάρμοζαν και για το 3, 5, 7,…
( Οι Πυθαγόρειοι κάνανε μόνο το $\sqrt{2}$ και την χρυσή τομή)]

Η **Ανθ(δ, α) = [1, 2, 2, 2, …..]** μεταφράζεται σε μορφή συνεχούς κλάσματος ως εξής:

$$\boldsymbol{δ/α} = \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

[ Αφού: η ανθυφαίρεση προκύπτει από τις ισότητες (με τους κατάλληλους περιορισμούς για τα υπόλοιπα):

$\delta = 1\cdot\alpha + \gamma_1$ (1)

$\alpha = 2\cdot \gamma_1 + \gamma_2$ (2)

$\gamma_1 = 2\cdot \gamma_2 + \gamma_3$ (3) κ.λ.π

Από την (1) παίρνουμε $\sqrt{2}$ **= δ/α = 1 +** $\frac{\gamma_1}{\alpha}$ **= 1 +** $\frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma_1}}$ **(4)**

Από την (2) παίρνουμε $\frac{\alpha}{\gamma_1} = 2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

Οπότε η (4) γίνεται $\sqrt{2}$ **= δ/α = 1 +** $\frac{\gamma_1}{\alpha}$ **= 1 +** $\frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma_1}}$ **= 1 +** $\frac{1}{2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$ **= 1 +** $\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}}$ **(5)**

Από την (3) παίρνουμε $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2 + \frac{\gamma 3}{\gamma_2}$ και η (5) γίνεται:

$$\sqrt{2} = \mathbf{\delta/\alpha = 1 +} \frac{\gamma_1}{\alpha} \mathbf{= 1 +} \frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma_1}} \mathbf{= 1 +} \frac{1}{2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \mathbf{= 1 +} \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}} \mathbf{= 1 +} \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{\gamma_3}{\gamma_2}}}$$

και συνεχίζουμε ομοίως. ]

Ανθυφαίρεση με αριθμούς: 7:5 = [1, 2, 2]; 17:12 = [1, 2, 2, 2], 3:2 = [1, 2] για παραδείγματα.

[Η ανθυφαίρεση μας επιτρέπει να συγκρίνουμε λόγους. Για παράδειγμα: (7:5) < (17:12). (Υπάρχουν όμως και κάποιοι κανόνες για την σύγκριση που δεν θα αναφέρουμε εδώ).

Δεν ευνοεί όμως καθόλου τις πράξεις με λόγους.]

**8. Anthyphairetic ratio theory.**

Θα θεωρήσουμε τώρα την υπόθεση ότι ο λόγος δύο αριθμών ή μεγεθών οριζόταν μέσω της ανθυφαίρεσής τους.

Για τους λόγους αριθμών ή σύμμετρων μεγεθών, η διαδικασία της ανθυφαίρεσης δίνει μια πεπερασμένη ακολουθία όρων από τους οποίους μόνο ο πρώτος μπορεί να είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα η ανθυφαίρεση είναι ακριβώς η διαδικασία που χρησιμοποιείται για την εύρεση του κοινού μέτρου τους (Πρόταση VII 2 για τους αριθμούς και X 3 για τα μεγέθη).

Ορισμός αναλογίας του Αριστοτέλη: Δύο μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο όταν έχουν την ίδια ανταναίρεσιν (ανθυφαίρεση).

**10. Theoretical and practical logistic**

Έχουμε υποστηρίξει ότι υπήρξε μια καλά αναπτυγμένη, αν και ενδεχομένως άτυπη, χρήση της Anthyphairesis για να οριστεί η αναλογία πριν από την ανάπτυξη της θεωρίας αναλογίας του Βιβλίου V. Τώρα υποστηρίζουμε ότι η θεωρητική λογιστική (logistike) πρέπει να ερμηνευθεί ως μελέτη του λόγου κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Αυτό συμφωνεί ακριβώς με τις χρήσεις που έχουμε εξετάσει στους Πλάτωνα, Αρχύτα και Αριστοτέλη, όπου εμφανίζεται ως τέχνη στενά συνδεδεμένη με τη γεωμετρία, στην οποία οι σημαντικές πρόοδοι έχουν γίνει πρόσφατα, και που ενσωματώνει τις θεωρητικές πλευρές των υπολογισμών.

ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΑΔΑ ΘΑΛΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΙ
ΝΑΟΥΣΑ 2010
ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΧΜΕΣ
Σωτήρης Συριόπουλος