ΝΑΟΥΣΑ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ 2009
ΘΑΛΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΙ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
«ΚΑΤΑΡΑΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»
του Κάρλο Φραμπέτι, Εκδόσεις opera, 2000

(Οι θεωρητικές θέσεις που αναφέρονται παρακάτω είναι γραμμένες αποκλειστικά για να βοηθήσουν στο να γίνει συζήτηση μεταξύ των συμμετεχόντων του εργαστηρίου και για τον λόγο αυτό δεν αναφέρω την βιβλιογραφία που χρησιμοποίησα)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η: Το παραμύθι του βοσκού

- Παιδιά, ποιος θα μας αφηγηθεί το παραμύθι του βοσκού;
- Πως σας φάνηκε αυτή η ιστορία;
- Εμένα μου άρεσε που έχει μια ενότητα. Έχει αρχή μέση και τέλος και μου δίνει μια ερμηνεία για το πώς δημιουργήθηκε το δεκαδικό σύστημα. Μου άρεσε επίσης που συνδέει τα μαθηματικά με καθημερινές καταστάσεις που συμμετέχει και το μυαλό και το σώμα μας. Βέβαια θα ήθελα να μάθω και όλη την πραγματική ιστορία.
- μαθητής: γιατί να μην είναι αυτή η πραγματική ιστορία;
- Σίγουρα κάπως έτσι εξελίχτηκαν τα πράγματα αλλά για να τελειοποιηθεί το μετρικό σύστημα έτσι όπως έχει επικρατήσει σήμερα, έπρεπε να «εφευρεθεί» *η κατάλληλη μαθηματική γλώσσα και ο κατάλληλος μαθηματικός συμβολισμός*. Όπως καταλαβαίνεται αυτά δεν μπορούν να γίνουν από την μια μέρα στην άλλη. Παρεμβαίνουν πολλοί άνθρωποι από διάφορες εποχές σε διάφορους πολιτισμούς. Το δεκαδικό σύστημα ουσιαστικά είναι πολύ νέο. Δεν ήταν πάντα έτσι. Και όταν πρωτοεμφανίστηκε στην σημερινή μορφή δεν έγινε από την αρχή αποδεκτό από όλους. Πέρασαν πολλά χρόνια μέχρι τελικά να καθιερωθεί. Και μπορεί να έρθει μια μέρα (που μάλλον εμείς δεν θα την προλάβουμε) και να αλλάξει!
- (Μαθητής:) Ναι όταν θα έχουμε 15 δάκτυλα στα χέρια!
- ή όταν θα γίνουμε άνθρωποι – κομπιούτερ. Τότε θα «δουλεύουμε» στο δυαδικό σύστημα.

Τελικά ήταν «καλό» το παραμύθι του βοσκού;	
Επιχειρήματα ενός καθηγητή (;)	**Επιχειρήματα «ενός παιδιού»**
- διαστρεβλώνει την πραγματική ιστορία και μαζί της την πραγματική φύση των μαθηματικών δίνοντας μαθητές μια επιβλαβή άποψη για χρησιμοθηρικά μαθηματικά - Σαφώς τα μαθηματικά ενδιαφέρθηκαν αρχικά για τις φυσικές ποσότητες – μέτρηση κοπαδιών ή αγρών – αλλά η εποχή αυτή πέρασε…Τα μαθηματικά είναι αφηρημένες έννοιες. Αυτά τα μαθηματικά έχει αξία να μάθουν οι μαθητές στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο (δες και το αναλυτικό πρόγραμμα) - Θα τρίζουν τα κόκαλα του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα: κατά μία άποψη, όλο το (φιλοσοφικό) έργο του Πλάτωνα αποσκοπούσε στο να ορίσει την μονάδα. Ακόμα, ο Ράσελ με τον Ουάιτχεντ αφιέρωσαν 362 σελίδες στο βιβλίο τους Πριγκίπια Ματεμάτικα	- είπαμε ότι ήταν παραμύθι και ήταν ωραίο παραμύθι - μου άρεσε που συνέδεε αυτά τα αφηρημένα σύμβολα (τους αριθμούς) με το σώμα μου και με συγκεκριμένα πράγματα - είναι πιο κοντά στο πως σκέφτομαι εγώ τους αριθμούς. Θέλω να καταλαβαίνω και να νιώθω τα μαθηματικά με τον δικό μου τρόπο και όχι με τον αφηρημένο δικό σας τρόπο - Δηλαδή οι αφηρημένες έννοιες που μου λέτε, πως δημιουργήθηκαν; ξαφνικά; Δεν κατασκευάστηκαν με κάποιο τρόπο που περνούσε και μέσα από το ανθρώπινο σώμα ή γενικά από συγκεκριμένες καταστάσεις; - Πως μπορείς να αποκόψεις τα δημιουργήματα από τους τρόπους που δημιουργήθηκαν;

για να αποδείξουν ότι 1 + 1 = 2 (Logicomix σελ. 203)	

Τι είναι τα μαθηματικά;		
Τα μαθηματικά, είναι *ένα αντικειμενικό, απόλυτο, αναμφισβήτητο και μη επιδεχόμενο διορθώσεις* σώμα γνώσεων, το οποίο θεμελιώνεται στην ακλόνητη βάση της παραγωγικής λογικής. (*Λογικισμός – Φορμαλισμός*). Τα μαθηματικά υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη γνώση και ανακαλύπτονται. Αποτελούν μέρος της φύσης και παραμένουν αμετάβλητα στο χρόνο. Για κάθε ερώτημα στα μαθηματικά υπάρχει μια προκαθορισμένη από τους βασικούς μαθηματικούς κανόνες απάντηση. Αν κάποια ερωτήματα παραμένουν	Προέρχονται από τον ανθρώπινο πολιτισμό και την ιστορία. Πολλές από τις σημαντικότερες ιδέες των μαθηματικών γεννιούνται από τις γενικές πτυχές του πολιτισμού παρά από τα μαθηματικά τα ίδια, τα οποία είναι μέρος του μεγαλύτερου πολιτιστικού περιβάλλοντος « Τα μαθηματικά γενικά δεν υπάρχουν κάπου εκεί έξω, αλλά δημιουργούνται ή εφευρίσκονται από τον άνθρωπο κατά την ενασχόλησή του με καθημερινά προβλήματα ή με νοητικές ιδέες, προς εξυπηρέτηση υλικών και πνευματικών στόχων »	Τα μαθηματικά είναι ένα μοναδικό πράγμα. Οι Πλατωνικές , φορμαλιστικές και κονστρουκτιβιστικές όψεις τους είναι πιστευτές επειδή η καθεμιά αντιστοιχεί σε μια ορισμένη σκοπιά, μια σκοπιά από μια ορισμένη γωνία ή μια εξέταση με ένα ιδιαίτερο όργανο. Το πρόβλημά μας είναι να οδηγηθούμε σε μια κατανόηση του ίδιου του πράγματος, να ταιριάξουμε τις επιμέρους όψεις – καθεμιά από τις οποίες είναι εσφαλμένη αν την πάρουμε μόνη της, απλά και μόνο επειδή είναι ατελής και μονόπλευρη. Από την στιγμή που είναι εικόνες του ίδιου πράγματος, είναι συμβατές. Η φαινομενική τους

αναπάντητα είναι μόνο και μόνο γιατί δεν έχουν ανακαλυφθεί ακόμα οι κατάλληλες διαδικασίες για τη λύση τους. *(Πλατωνισμός)*		ασυμβατότητα δημιουργείται επειδή τις κοιτάζουμε με αταίριαστη προκατάληψη" Davis & Hersh (1981)

<u>Αφήγηση:</u>

Ο Δοξιάδη (Δεκέμβριος 2003):

- Διαχωρίζει την παλιότερη ερμηνεία της αφήγηση (ως έχουσα μοναδικό προορισμό την μεταφορά συναισθημάτων – κυρίως μέσα από την λογοτεχνία) από την έννοια της αφήγησης ως επικοινωνιακή λειτουργία που περιλαμβάνει και την μετάδοση γνώσης που μπορεί να είναι απλά πραγματολογική, θεωρητική, ιδεολογική, μάθημα περί μεθόδου, τρόπου ζωής, σχεδόν οτιδήποτε.
- *Ισχυρίζεται ότι η αφήγηση συνιστά έναν άλλον νόμιμο γνωστικό τρόπο, ισχυρό όσο και η ταξινομική-αναλυτική ματιά της επιστήμης,* άποψη που μόλις το 1986 «νομιμοποιήθηκε» με το άρθρο του εκπαιδευτικού και γνωστικού ψυχολόγου Jerome Bruner ‘Two modes of thinking’ ο οποίος είναι ο πρώτος που έθεσε το θέμα στη γενικότητά του, τονίζοντας ότι ο ανθρώπινος νους έχει δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους να γνωρίζει την πραγματικότητα: αυτόν που αποκαλεί παραδειγματικό (paradigmatic) δηλαδή τον ταξινομικό, ‘επαγωγικό’ (inductive) ή ‘παραγωγικό’ (deductive) της επιστήμης, και δεύτερο τον αφηγηματικό (narrative), που είναι διάφορος του πρώτου σε μορφή, πρόθεση και λειτουργία - και οι δυο τρόποι, *ενώ μπορούν να συνεργαστούν, δεν μπορούν να υποκαταστήσουν ο ένας τον άλλον*.

- Αναδεικνύει και έναν άλλο ρόλο της αφήγησης: *αυτόν της ερμηνείας* «Ερμηνεία και αφήγηση είναι έννοιες αλληλένδετες: είτε το θέλουμε είτε όχι, αφηγούμενοι ερμηνεύουμε γεγονότα και πρόσωπα, που πάει να πει τα εντάσσουμε σε ένα σύστημα που αναδεικνύει τις αιτιακές αλληλουχίες που τα διέπουν».
- Υποστηρίζει ότι η αντίληψη δεν είναι παθητική-αναλυτική αλλά βουλητική-συνθετική λειτουργία. Ο νους ψάχνει ενεργά να συνδέσει γεγονότα και πρόσωπα γύρω του με σχέσεις αιτιότητας, ‘ αντικειμενικά υπαρκτές’ ή και μη.
- Τελικά, μια σειρά αιτιακών συνδέσεων, όταν έχει ικανό μήκος, γίνεται εξ ορισμού αφήγηση, ιστορία. Η προκατάληψη της νόησης υπέρ της αφηγηματικής - αιτιακής διαδοχής είναι προκατάληψη υπέρ της τάξης σε έναν χαοτικό κόσμο.

(Η αξία λοιπόν της αφήγησης είναι ότι τοποθετεί το υπό εξέταση θέμα σε κάποια πλαίσια και εξηγεί τα όριά του. Προσφέρει δηλαδή *ενότητα*.
Βέβαια, το τι αποτελεί αφήγηση και τι όχι, νομίζω ότι έχει σε μεγάλο βαθμό να κάνει με τις προθέσεις αυτού που αφηγείται και πάνω από όλα αν στις προθέσεις του είναι πρώτα από όλα η επικοινωνία με τους ακροατές του. Αυτό νομίζω ότι μια σημαντική διαφορά της αφήγησης από την *διάλεξη* που ίσως δικαίως έχει πλέον θεωρηθεί μάλλον ακατάλληλη για την διδασκαλία).

Ο Δοξιάδης (Ιανουάριος, 2003*)* σχετικά με την ανάγκη να εισαχθεί η αφήγηση στην σχολική τάξη των μαθηματικών, καταλήγει στους παρακάτω λόγους:
- Ο στόχος είναι:
α) να αυξήσει την γοητεία του αντικειμένου των μαθηματικών,
β) να του προσδώσει μια αίσθηση πνευματικότητας, ιστορική και κοινωνική σχετικότητα και μια θέση στον πολιτισμό μας,
γ) να δώσει στους μαθητές μια καλύτερη αίσθηση του σκοπού των μαθηματικών, πέρα από τα όρια των, αναγκαστικά περιορισμένων, τεχνικών μαθηματικών που μπορούν να διδαχτούν μέσα στα όρια του σχολικού συστήματος.
- Η αφήγηση των μαθηματικών μπορεί να συμπληρώσει και να αλληλεπιδράσει με την διδασκαλία των τεχνικών των μαθηματικών. Δίνοντας χρόνο στην αφήγηση, τα μαθηματικά μπορούν να ενσωματωθούν στην ψυχή των μαθητών, ενώ διδάσκοντας μόνο τεχνικές, στους πιο πολλούς τελικά δεν θα μείνει τίποτα.
- Ιδιαίτερα για τους μικρούς μαθητές, η αφήγηση μπορεί να διευκολύνει

την μετάβαση στην μαθηματική αφαίρεση. Το να δημιουργήσεις ιστορίες, πιθανόν και με αναγνωρίσιμους ήρωες και καταστάσεις, αλλά μέσα σε πλούσια εννοιολογικά περιβάλλοντα, (χωρίς απαραίτητα να περιέχουν αριθμούς ή μαθηματικό φορμαλισμό αλλά να είναι πλούσιες τόσο σε πλοκή όσο και σε θέματα στρατηγικών λύσης προβλήματος), οι μαθητές θα «ταυτιστούν» με τον ήρωα και θα προχωρήσουν να κάνουν μαθηματικά προσπαθώντας να βοηθήσουν τις σκέψεις του.

- Στους μαθητές μεγαλύτερης ηλικία κυριαρχεί, στο σχολείο, η μηχανική (σχεδόν καταναγκαστική) λύση ασκήσεων. Για να ξεφύγουμε από την απλή εκμάθηση τεχνικών χωρίς νόημα μπορούμε να εισάγουμε στο σχολικό πρόγραμμα την βιογραφία και την ιστορία. Μπορούμε να μιλάμε για τους μεγάλους μαθηματικούς και την εποχή τους, έστω και αν δεν μπορούμε να εξηγήσουμε στους μαθητές πλήρως το μαθηματικό τους έργο (ακόμα και με έναν *παραμαθηματικό* τρόπο). Έτσι οι μαθητές μπορούν:

α) να αναγνωρίσουν το ανθρώπινο πρόσωπο της μαθηματικής έρευνας και έτσι να κινητοποιηθούν καλύτερα για μάθηση,

β) ανάλογα με τον μαθηματικό ή την ιστορική περίοδο ή το πρόβλημα που διδάσκεται, μεγάλο μέρος από τις σχετικές μαθηματικές τεχνικές μπορούν να ενσωματωθούν με τρόπους που να απαλύνουν και να παρακινούν τις μεταβάσεις από το άτομο στην ιδέα στο πρόβλημα στο άτομο.

γ) βοηθά τους μαθητές να βρουν ένα πλαίσιο για τα μαθηματικά και μέσω αυτού μια αίσθηση του πραγματικού σκοπού αυτού που μέχρι τώρα είναι συνήθως ένα χωρίς νόημα παιχνίδι με αφηρημένα σύμβολα (που μερικοί από αυτούς θεωρούν απλά ότι είναι κάτι χρήσιμο).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η: Εύρεση αριθμητικών μοτίβων

Στις σελίδες 94 - 96 του βιβλίου Καταραμένα μαθηματικά αναφέρεται στο άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο 2:

«<u>Τσάρλι</u>: Πρόσεξε καλά, η μάλλον παρατήρησε με συστηματικό τρόπο, αρχίζοντας από την αρχή. Οι δύο αριθμοί στην αρχή έχουν άθροισμα 3 και ο τρίτος είναι το 4. Οι τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 7 και ο τέταρτος είναι το 8. Οι τέσσερις αριθμοί έχουν άθροισμα 15 και ο πέμπτος είναι το 16… <u>Αλίκη</u>: Το βρήκα! Κάθε αριθμός είναι το άθροισμα όλων των προηγουμένων συν ένα. <u>Τσάρλι</u>: Σωστά, τότε το άθροισμα όλων των αριθμών θα είναι το διπλάσιο του τελευταίου πλην ένα.

Μπορούμε να προτείνουμε μαθητές να απαντήσουν στις παρακάτω ερωτήσεις:
- ισχύει ο ίδιος κανόνας αν βάζαμε στην σκακιέρα σε κάθε τετραγωνάκι το 3-πλάσιο αριθμό σπόρων από αυτό που έχει το προηγούμενο τετραγωνάκι;
- μπορούμε τότε να βρούμε έναν άλλο κανόνα για αυτήν την περίπτωση; (να δοκιμάσουν με τρεις όρους, μετά με τέσσερις όρους ή και με πέντε ώστε να βρουν τον κανόνα)
- **αν ήταν επί τέσσερα;**
- **μπορούμε να εκφράσουμε με λόγια έναν γενικό κανόνα;**

- **Ένα παλιό αγγλικό νανούρισμα** (*Τριγωνομετρικά λουκούμια* σελ. 34) έλεγε:

Στο δρόμο για το Σαιντ Άιβς,
Συνάντησα έναν άντρα που γυναίκες είχε εφτά·
Η κάθε του γυναίκα είχε εφτά σακιά,
Κάθε σακί τους γάτες είχε μέσα εφτά,
Κι η κάθε γάτα είχε εφτά γατιά,
Γάτες, γατιά, γυναίκες και σακιά,
Πόσοι όλοι μαζί τραβούσανε, παιδιά,
Στο δρόμο για το Σαιντ Άιβς;

Μπορούμε να το απαντήσουμε;

ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΤΑΞΥ ΜΑΣ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

ΓΙΑΤΙ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ;
- Σε αντίθεση με πολλές χώρες του εξωτερικού (αγγλοσαξονικές, Ευρώπη) στην χώρα μας δεν δίνουμε μεγάλο βάρος στην επίλυση (αυθεντικού) προβλήματος. Ένα μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί μια *πρόκληση*, λόγω της *αβεβαιότητας* που περιέχει, η οποία μπορεί να προκαλέσει την *ενεργητική συμμετοχή* των μαθητών. Η διαπραγμάτευση της αβεβαιότητας αυτής ανάμεσα στους μαθητές ή ανάμεσα στους μαθητές και τον καθηγητή αποτελεί και το νόημα της δραστηριότητας.
Κατά την επίλυση προβλήματος οι μαθητές οικοδομούν εκείνο το σύνολο της μαθηματικής γνώσης που θα τους επιτρέπει να διατυπώνουν, να κατασκευάζουν, να ερευνούν, να επιλύουν και να δικαιολογούν μαθηματικά προβλήματα και έννοιες (και μάλιστα στα πλαίσια μιας κοινότητας μαθητών).
Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα οι μαθητές θα αναζητήσουν την ύπαρξη ενός αριθμητικού μοτίβου. Στην διαδικασία αυτή, θα υποθέτουν, θα δοκιμάζουν, θα ελέγχουν, θα εκφράζουν με λόγια και θα γενικεύουν. Έτσι μαθαίνουν να ανακαλύπτουν έννοιες και σχέσεις, αναπτύσσουν την μαθηματική γλώσσα, και κάνουν συγκρίσεις με άλλα πρότυπα που έχουν μελετήσει.
Η φιλοσοφική άποψη για τα μαθηματικά που υποκρύπτεται (και είναι διάχυτη στο βιβλίο) είναι ότι τα μαθηματικά είναι μια (ημί-εμπειρική) επιστήμη αντικειμένων που χαρακτηρίζονται από πρότυπο κανονικότητας και μια λογική τάξη (σε αντίθεση με την άποψη ότι η μαθηματική γνώση είναι το σώμα των δεδομένων και των διαδικασιών που εξετάζουν τις ποσότητες, τα μεγέθη και τις μεταξύ τους σχέσεις και γνώση των μαθηματικών σημαίνει να μπορεί κανείς να χειρίζεται και να κατέχει πλήρως τα δεδομένα και τις διαδικασίες). Βρίσκοντας και διερευνώντας αυτή την κανονικότητα ή την τάξη και κατόπιν κατανοώντας της, είναι το επιστέγασμα αυτού που λέμε «κάνω μαθηματικά». Οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι «κάνω μαθηματικά» σημαίνει πρώτα από όλα «διερευνώ» και όχι απλά εφαρμόζω, με έναν τελετουργικό πολλές φορές τρόπο, κάποιους δεδομένους κανόνες.

- Για να ενδυναμώσουμε την (μαθηματική) επικοινωνία των μελών της λέσχης. Ο κύριος στόχος μας δεν είναι απλά να αλλάξουν στάση απέναντι στα μαθηματικά οι μαθητές. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί για την μαθηματική επικοινωνία (και συνεπώς και για να μάθουν μαθηματικά). Πρέπει να τους δώσουμε την ευκαιρία να δουν τα μαθηματικά και από άλλες οπτικές γωνίες ώστε να κατανοήσουν καλύτερα την φύση τους και παράλληλα να κάνουν μαθηματικά.

ΓΙΑΤΙ ΝΑ ΠΡΟΣΘΕΣΟΥΜΕ ΤΟ ΝΑΝΟΥΡΙΣΜΑ;
Η προσθήκη του νανουρίσματος δίνει ένα πιο ανθρώπινο νόημα στα μαθηματικά. Δείχνει ότι τα μαθηματικά βρίσκονται παντού στην ζωή μας με διάφορους τρόπους που μπορεί να συνδυάζονται με πράγματα που δεν είναι απαραίτητα «χρήσιμα» ή «υπολογιστικά». Μπορεί να είναι και πράγματα που συνδέονται με το συναίσθημα ή την ομορφιά. Όπως όταν χρησιμοποιούνται στην τέχνη ή για την κατασκευή ενός πλακόστρωτου ή ακόμα και σε ένα νανούρισμα. Μερικοί μαθητές μπορεί σε αυτό, στην καλλιτεχνική ή γενικά στην πιο ανθρώπινη, πτυχή των μαθηματικών, να βρουν ένα λόγο για να ενεργοποιηθούν στα μαθηματικά.

ΘΑ ΣΥΜΜΕΤΑΣΧΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ;

Αυτό που προσπαθεί να μας δείξει ο συγγραφέας είναι ότι σε μια τέτοια δημιουργική όψη των μαθηματικών, **όλοι** μπορούν να συμμετάσχουν.

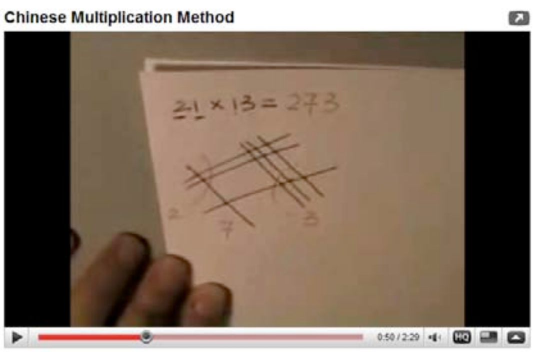
Ο ΡΟΛΟΣ ΜΑΣ ΚΑΘΩΣ ΘΑ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ
Γυρνάμε ανάμεσα στις ομάδες και ακούμε τις απορίες που μας απευθύνουν οι μαθητές. Προσπαθούμε να καταλαβαίνουμε, με ερωτήσεις, τις απορίες τους αλλά να μην τους δίνουμε έτοιμες απαντήσεις αλλά να λειτουργούμε ως σκαλωσιά για να τις βρουν μόνοι τους (νομίζω κάπως έτσι λειτουργεί και ο συγγραφέας του βιβλίου απέναντι στην Αλίκη).

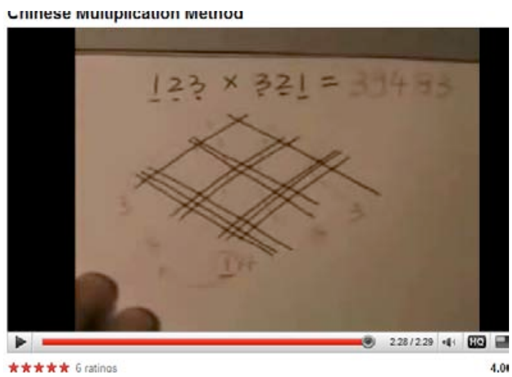
ΝΑ ΑΝΑΦΕΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ ΚΑΙ ΤΟΝ ΤΥΠΙΚΟ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟ;
Ο συγγραφέας το αναφέρει παρακάτω (σελ. 115). Κάνει καλά;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η : Πολλαπλασιασμός

Πως γινόταν ο πολλαπλασιασμός σε άλλους πολιτισμούς;

Α. Με αφορμή το σχήμα της σελίδας 80: Κινέζικος πολλαπλασιασμός (χωρίς την προπαίδεια)





Οι μαθητές να παρατηρήσουν τους παραπάνω πολλαπλασιασμούς και να κάνουν δικούς τους.

<u>ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ</u>: Ανάμεσα σε άλλα: να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά εξαρτώνται από την εποχή αλλά και την κοινωνία στην οποία αναπτύσσονται.

Β. <u>Με αφορμή την παρατήρηση σελ. 163 ότι «κάθε αριθμός είναι δύναμη του 2 ή μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυνάμεων του 2»</u> («και αυτό είναι τόσο σπουδαίο;»: Πρόκειται για την δυνατότητα μετατροπής κάθε αριθμού στο δυαδικό σύστημα. Σημαντικό για τους υπολογιστές. Μπορούμε να μιλήσουμε με τους μαθητές για το δυαδικό σύστημα και να αναλάβουν να βρουν πληροφορίες για την σημασία του στους υπολογιστές)
Η χρήση της παραπάνω ιδιότητας για να κάνουν πολλαπλασιασμό οι Αρχαίοι αιγύπτιοι όπως φαίνεται από τον Πάπυρο του Rhind. Σύνδεση με το πρόβλημα με το νανούρισμα.

Το Πρόβλημα 79 του Παπύρου Rhind (Από το βιβλίο Τριγωνομετρικά Λουκούμια)

Απογραφή σε ένα σπίτι:		σπίτια	7
1	2.801	γάτες[a]	49
2	5.602	ποντίκια	343
4	11.204	σιτάρι	2.301[β]
		χεκάτ	16.807
Σύνολο	19.607	Σύνολο	19.607

α. Η αιγυπτιακή λέξη για τη «γάτα» είναι myw. *Αν προσθέσουμε μερικά φωνήεντα, θα γίνει* meey'auw *(μιάου).*
β. Προφανώς, ο Αχμές έχει κάνει κάποιο λάθος εδώ. Το σωστό θα έπρεπε να είναι 2.401.

Τι κρύβεται πίσω από αυτούς τους μυστηριώδεις στίχους; Είναι φανερό ότι πρόκειται για μια γεωμετρική πρόοδο που τόσο ο πρώτος όρος της όσο και ο λόγος της είναι 7. Ο γραφέας μάς υποδεικνύει πώς να αθροίζουμε τους όρους της. Όπως όμως θα έκανε κάθε καλός δάσκαλος για να σπάσει την καθημερινή μονοτονία ενός μαθήματος μαθηματικών, έτσι και ο Αχμές διανθίζει το πρόβλημα με μια ιστορία που θα μπορούσαμε να τη διατυπώσουμε ως ακολούθως: Υπάρχουν επτά σπίτια. Κάθε σπίτι έχει επτά γάτες. Κάθε γάτα τρώει επτά ποντίκια. Κάθε ποντίκι τρώει επτά στάχυα σιτάρι. Κάθε στάχυ δίνει επτά χεκάτ σπόρο. Να βρεθεί πόσα είναι όλα μαζί.

Η δεξιά στήλη περιέχει σαφώς τους όρους της προόδου 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 ακολουθούμενους από το άθροισμα τους 19.607 (δεν θα μάθουμε ποτέ αν η λανθασμένη τιμή 2.301 για χο 7^4 είναι αντιγραφικό λάθος του Αχμές ή αν υπήρχε και στο πρωτότυπο). Τώρα, όμως, ο Αχμές παίζει το δεύτερο χαρτί του: Στην αριστερή στήλη μάς δείχνει πώς να βρούμε την απάντηση με έναν συντομότερο, πιο έξυπνο τρόπο. Παρακολουθώντας τον, θα δούμε την αιγυπτιακή μέθοδο πολλαπλασιασμού σε εφαρμογή. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν ότι κάθε ακέραιος μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα όρων της γεωμετρικής προόδου 1, 2, 4, 8, ..., και ότι η παράσταση αυτή είναι μοναδική (πρόκειται για την παράσταση ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα, όπου οι συντελεστές, ή «δυαδικά ψηφία» είναι 0 ή 1) [π.χ 13 στο δεκαδικό = 1101 στο δυαδικό σύστημα http://el.wikipedia.org/wiki/Δυαδικό_σύστημα]
Για να πολλαπλασιάσουν, ας πούμε, το 13 με το 17, αρκούσε να γράψουν έναν από τους παράγοντες, έστω το 13, ως άθροισμα δυνάμεων του 2, δηλαδή 13 = 1 + 4 + 8, να πολλαπλασιάσουν κάθε δύναμη με τον άλλο παράγοντα και να προσθέσουν τα αποτελέσματα: 13 χ 17 = 1 χ 17 + 4 χ 17 + 8 χ 17 = 17 + 68 + 136 = 221. Η εργασία διευκολύνεται αν εργασθούμε σε στήλες:

17 χ 1 = 17 *
χ 2= 34
χ 4= 68 *
χ 8 = 136 *

Οι αστερίσκοι υποδεικνύουν ποιες δυνάμεις πρέπει να προστεθούν. Με αυτό τον τρόπο, οι Αιγύπτιοι μπορούσαν να κάνουν οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό χρησιμοποιώντας μόνο διαδοχικούς διπλασιασμούς και προσθέσεις. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται σε όλα τα γνωστά αιγυπτιακά κείμενα. Ήταν τόσο θεμελιώδης για τον αιγύπτιο γραφέα όσο οι πίνακες της προπαίδειας για τον σημερινό μαθητή.

Από πού λοιπόν προέρχεται το 2.801, ο πρώτος αριθμός της αριστερής στήλης του Προβλήματος 79; Εδώ ο Αχμές χρησιμοποιεί μια ιδιότητα των γεωμετρικών προόδων που ήταν γνωστή στους Αιγυπτίους: το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου στην οποία ο πρώτος όρος και ο λόγος ταυτίζονται ισούται με το λόγο πολλαπλασιασμένο επί το άθροισμα των (ν - 1) πρώτων όρων αυξημένο κατά 1. Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, έχουμε: $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^\nu = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\nu-1})$. Αυτός ο «αναγωγικός τύπος» επέτρεπε στον αιγύπτιο γραφέα να ανάγει την άθροιση των όρων μιας γεωμετρικής προόδου στην άθροιση των όρων μιας άλλης με λιγότερους (και μικρότερους) όρους. Αντί να υπολογίσει το άθροισμα

7 + 49 + 343 + 2.401 + 16.807,

ο Αχμές σκέφθηκε να το απλουστεύσει ως

7 χ (1 + 7+ 49+ 343+ 2.401).

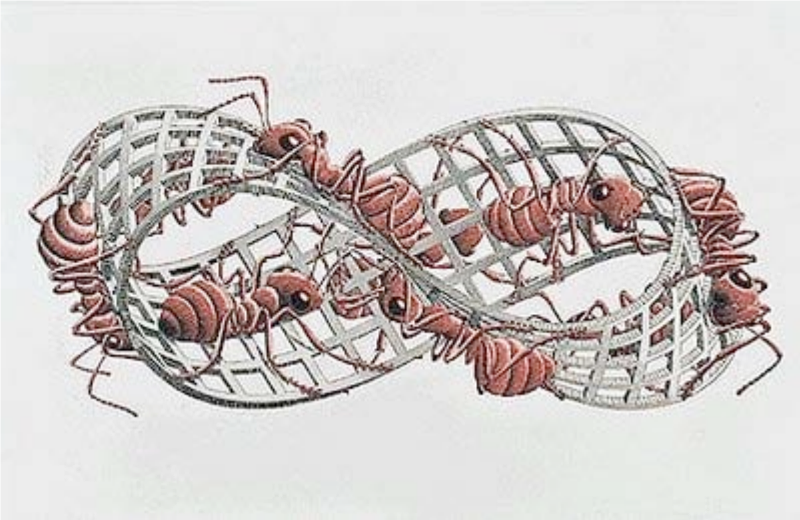
Αφού το άθροισμα των όρων μέσα στην παρένθεση είναι 2.801, το μόνο που χρειαζόταν να κάνει ήταν να πολλαπλασιάσει το 2.801 με το 7, αναλύοντας το 7 σε 1 + 2 + 4. Αυτό μας δείχνει η αριστερή στήλη. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αυτής της στήλης απαιτεί μόνο τρία βήματα ενώ η «προφανής» λύση της δεξιάς στήλης απαιτεί πέντε. Προφανώς, ο γραφέας συμπεριέλαβε τούτο το πρόβλημα ως άσκηση πάνω στη δημιουργική σκέψη.

Μπορεί κανείς να εξηγήσει γιατί ο Αχμές επέλεξε ως λόγο το 7; Στο εξαιρετικό βιβλίο του *Mathematics in the times of Pharaohs* ο *R.J.Gillings* απαντά στην ερώτηση ως ακολούθως: «Ο αριθμός 7 εμφανίζεται συχνά στα αιγυπτιακά μαθηματικά, διότι μέσω διαδοχικών διπλασιασμών οι τρεις πρώτοι παράγοντες είναι *πάντοτε* 1, 2, 4, που έχουν άθροισμα 7.» Αυτή η επεξήγηση δεν είναι και πολύ πειστική, διότι θα μπορούσε κάλλιστα να εφαρμοσθεί στο 3 (= 1 + 2), στο 15 (= 1 + 2 + 4 + 8) και τελικά σε όλους τους ακεραίους της μορφής $2^{\nu} - 1$. Μια πιο αληθοφανής εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι το 7 επελέγη διότι κάποιος μεγαλύτερος αριθμός θα καθιστούσε τον υπολογισμό υπερβολικά εκτενή, ενώ ένας μικρότερος δεν θα έδειχνε καθαρά την ταχύτητα με την οποία αυξάνει η πρόοδος: Αν ο Αχμές είχε χρησιμοποιήσει, ας πούμε, το 3, το τελικό αποτέλεσμα (363) δεν θα ήταν και τόσο «εντυπωσιακό» για τον αναγνώστη.

ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ:
-Ανάλυση και κατανόηση ενός ιστορικού χειρόγραφου
- Ο πολλαπλασιασμός σε έναν άλλο πολιτισμό
- Σημασία έχει επίσης το ότι ο συγγραφέας παρουσιάζει <u>δύο τρόπους</u> με προφανείς διδακτικούς στόχους
- Οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την διπλή χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας με έναν ελκυστικό τρόπο. Μπορούμε να τους προκαλέσουμε να κάνουν με τον ίδιο τρόπο και κάποιον άλλο πολλαπλασιασμό ή και να φτιάξουν ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Για παράδειγμα με το 5:
5 + 25 + 125 + 625 = 780.
Αλλά: 5 + 25 + 125 + 625 = 5(1 + 5 + 25 + 125) = 5·156
Όμως: 5 = 1 + 4
Έτσι (για το 5·156): 1·156 = 156*
2·156 = 312
4·156 = 624*
Άρα: 5·156 = 156 + 624 = 780

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η Ταινία του Mobius (Μέμπιους)



Moebius band II   M. C. Escher

Τι παρατηρείται στην παραπάνω ζωγραφιά; [Η ταινία Mobius είναι μια επιφάνεια που έχει μόνο μία πλευρά αλλά είναι δυνατόν να τη διατρέξει κανείς σε όλο της το μήκος έχοντας την αίσθηση ότι αλλάζει μεριά, κάτι που γίνεται εμφανές και στο σχέδιο του Escher (τα μυρμήγκια βοηθούν σε αυτό)].

[Δεν είναι τυχαίο που το σχήμα της ταινίας του Mobius θυμίζει το μαθηματικό σύμβολο του απείρου. Τα μυρμήγκια της εικόνας θα μπορούσαν να προχωρούν για πάντα και να παρέμεναν μονίμως στην ίδια μεριά!]

- **Τι σας θυμίζει; (Λούνα πάρκ) (το σύμβολο του απείρου)**

http://www.youtube.com/watch?v=7hfG46NyQ7I&feature=related

- **Ξέρετε άλλο σχήμα που να μην έχει εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια;**

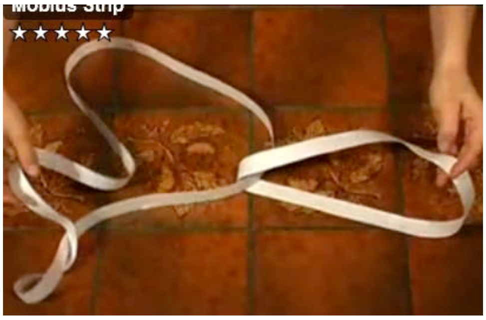
- **Μπορείτε να φτιάξετε μια ταινία Mobius; (**Πρέπει να έχουν **χαρτί, ψαλίδι** και **συραπτικό)**

- **Ξεκινήστε από ένα σημείο με το μολύβι σας και καταλήξτε στο ίδιο διατρέχοντας όλη την επιφάνια.**

- **Με το ψαλίδι κόψτε την ταινία στην μέση. Τι**

παρατηρείται;

- **Μπορείτε από μια ταινία Μέμπιους να φτιάξετε και το παρακάτω:**



[Μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές (από την προηγούμενη συνάντηση) να βρουν πληροφορίες για την τοπολογία (http://www.youtube.com/watch?v=r548MhLPcHk&NR=1 με απλό τρόπο με σκίτσα) και την Ταινία του Mobius.]

Η δραστηριότητα θα γίνει με μια λωρίδα χαρτί όπως περιγράφεται στα βίντεο: http://www.youtube.com/watch?v=N9X8HjRoHH8&NR=1 και http://www.hellenica.de/Math/TainiaTouMoebius.html

- **Ας δούμε μερικούς κανόνες της λογικής, για παράδειγμα σε κύκλους (κυκλικούς δίσκους):**

  - Κάθε αντικείμενο βρίσκεται είτε εντός του κύκλου είτε εκτός του κύκλου
  - Αν έχουμε δύο κύκλους Α και Β και ένα άλλο αντικείμενο Χ. Τότε αν το Α βρίσκεται εντός του Β και το Χ βρίσκεται εντός του Α, τότε το Χ βρίσκεται εντός του Β.
  - Αν έχουμε τρεις κύκλους Α, Β, Γ, αν το Α βρίσκεται εντός του Β και το Β βρίσκεται εντός του Γ, τότε το Α βρίσκεται εντός του Γ.

- Αν έχουμε δύο κύκλους Α και Β και ένα άλλο αντικείμενο Υ, αν το Α

βρίσκεται εντός του Β και το Υ βρίσκεται εκτός του Β, τότε το Υ βρίσκεται εκτός του Α.

Εξετάστε αν ισχύουν οι παραπάνω προτάσεις σε σχήματα Mobius

ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ: Μέσα από τα δημοσιεύματα των εφημερίδων (π.χ. http://news.kathimerini.gr/4dcgi/_w_articles_world_1_17/07/2007_234593 http://www.mathcom.gr/index.php?topic=27.0)

οι μαθητές θα δουν *πως από απλές ιδέες*, μέσω της μαθηματικοποίησής τους (που δεν είναι πάντα εύκολη) παράγεται πολιτισμός (τεχνολογικός ή τέχνη π.χ Escher ή ψυχαγωγία π.χ λούνα πάρκ: http://www.youtube.com/watch?v=7hfG46NyQ7I&feature=related)

Ακόμα: είναι μια πρώτη γνωριμία με την ζωγραφική του Escher. Μετά από αυτήν την δραστηριότητα θα αποκτούσε επιπλέον νόημα μια επίσκεψη στο Μουσείο Ηρακλειδών στο Θησείο (http://www.herakleidon-art.gr/el/index.cfm). Εκεί μπορείτε να παρακολουθήσετε (δωρεάν) το εκπαιδευτικό πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά». Χρειάζεται πρώτα να κλείσετε ραντεβού.

Ακόμα: μια πρώτη γνωριμία με την μαθηματική λογική.

Επίσης: τα μαθηματικά δεν είναι μόνο θεωρητικά ή αφηρημένα

Κατά την γνωσιακή επιστήμη η σκέψη (και ειδικότερα η μαθηματική σκέψη) έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

1. *Το ενσώματο του νου.* Η λεπτομερής φύση και η δυναμική των σωμάτων μας, των εγκεφάλων μας και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο δομούν τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική. Αυτό περιλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες και τη μαθηματική λογική.

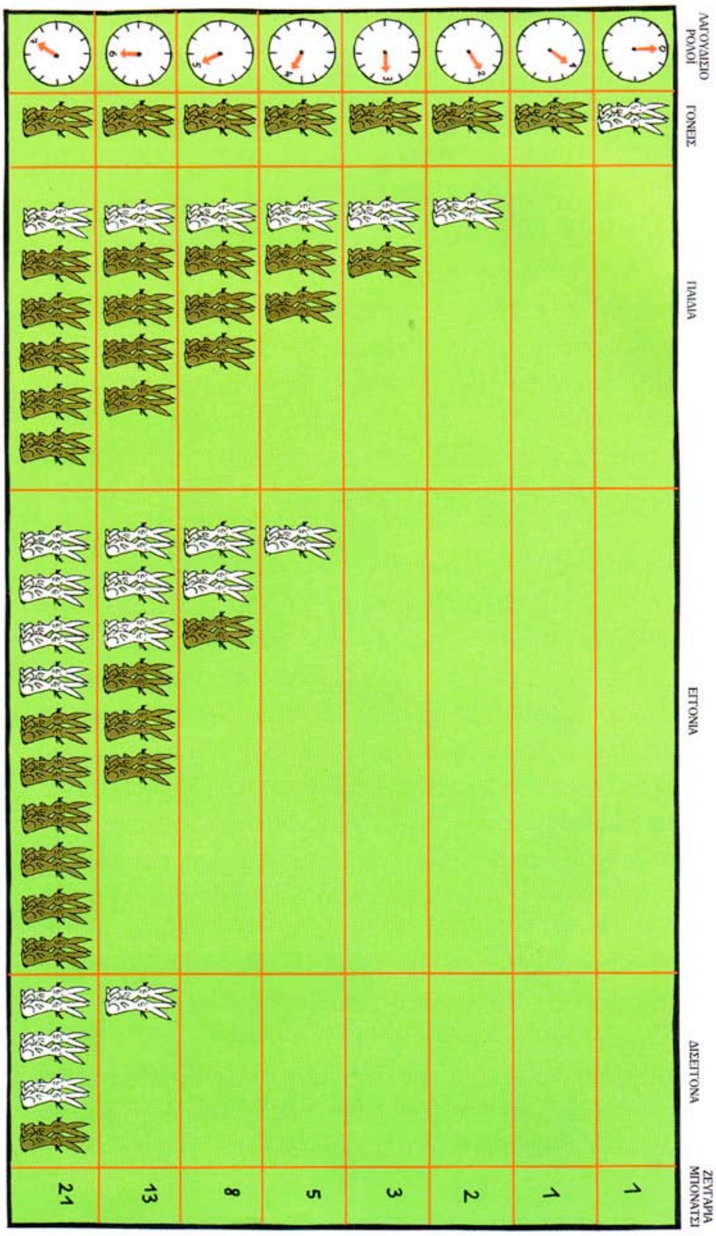
2. *Το γνωσιακό ασυνείδητο.* Οι περισσότερες γνωσιακές διαδικασίες είναι ασυνείδητες – όχι κατασταλμένες κατά τη Φροϋδική έννοια, αλλά απλά απρόσβατες σε άμεση συνειδητή ενδοσκόπηση. Δεν μπορούμε μέσω της ενδοσκόπησης να κοιτάξουμε απ' ευθείας τα εννοιολογικά μας συστήματα και τις χαμηλού επιπέδου γνωσιακές διαδικασίες μας. Αυτό περιλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής σκέψης.

3. *Μεταφορική σκέψη.* Κατά το μεγαλύτερο μέρος, τα ανθρώπινα όντα αντιλαμβάνονται τις αφηρημένες έννοιες με σαφή τρόπο, με τη χρήση ακριβούς συμπερασματικής δομής και τρόπων συλλογισμού θεμελιωμένων στο αισθησιο-κινητικό σύστημα. Ο γνωσιακός μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο κατανοείται μέσω του σαφούς ονομάζεται εννοιολογική *μεταφορά* (conceptual metaphor). Η μαθηματική σκέψη επίσης χρησιμοποιεί την εννοιολογική μεταφορά, όπως όταν αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς ως σημεία πάνω σε μια ευθεία: χωρίς αυτήν δεν θα υπήρχε η αναλυτική γεωμετρία. *"Εννοιολογική μεταφορά είναι ένας γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ένα είδος πράγματος σαν να ήταν κάτι άλλο. Είναι θεμελιωμένο συμπέρασμα ότι συντηρεί την εγκάρσια τομή-περιοχή χαρτογράφησης- του νευρικού μηχανισμού που επιτρέπει σε μας να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική δομή μιας αντιληπτικής περιοχής (πέστε, γεωμετρία) και να βγάλουμε συμπεράσματα για κάποια άλλη (πέστε, αριθμητική)."*

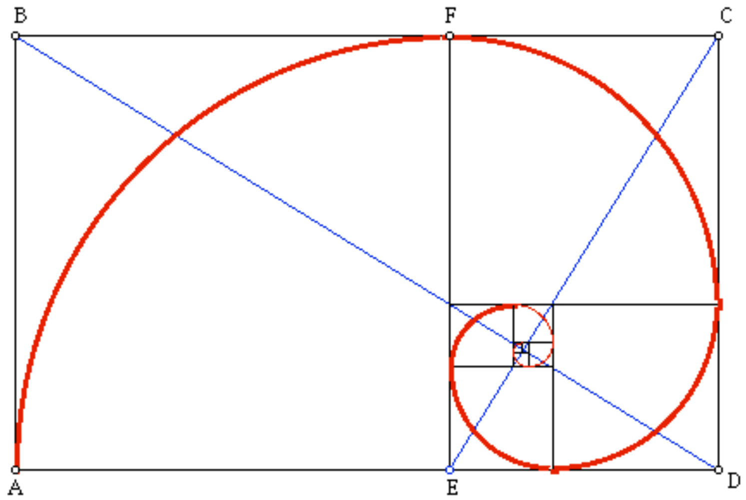
(Στο βιβλίο Καταραμένα μαθηματικά ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η χρήση της ζυγαριάς για την κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η: Ο Fibonacci

Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει την διαδικασία σχηματισμού των αριθμών Fibonacci ως αριθμό ζευγαριών κουνελιών. Στο Καταραμένα μαθηματικά, κακώς, απουσιάζει η έννοια του ζευγαριού. Λέει ότι κάθε κουνέλι γεννά ένα άλλο. Αυτό είναι παράλογο (ακόμα και για παιδιά δημοτικού…) Το σωστό πρόβλημα είναι ότι ένα ζευγάρι κουνελιών γεννά (έστω) ένα ζευγάρι παιδιών. (Μια καλή περιγραφή της διαδικασίας θα βρείτε στο βιβλίο «Το πειραχτήρι των αριθμών» από όπου έχω πάρει και το παρακάτω σχήμα).



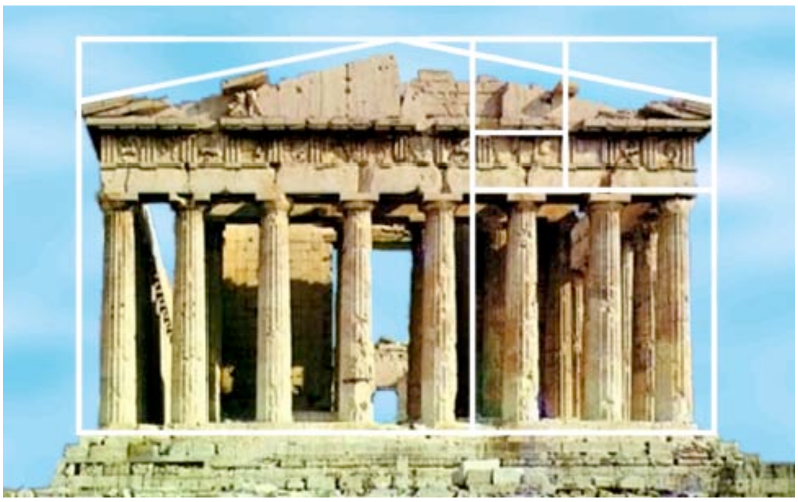
(Για τους αριθμούς γενικά μπορούμε να βρούμε πολλά και στο βιβλίο: «Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών» Εκδόσεις Κέδρος.)



Οι μαθητές πρώτα θα δοκιμάσουν με ένα απλό χαρτί α4 (διαστάσεις 21επί 28) να φτιάξουν (λυγίζοντας το χαρτί) ένα τετράγωνο (γιατί είναι τετράγωνο;). Μετά στο ορθογώνιο που απομένει να φτιάξουν ένα άλλο τετράγωνο κ.λ.π. Σε κάθε περίπτωση να βρίσκουν τον λόγο των πλευρών των ορθογωνίων. Θα παρατηρήσουν ότι ι λόγοι είναι διαφορετικοί. (την διαδικασία αυτή μπορούμε να τους την δείξουμε εμείς)

Στην συνέχεια, να αποκόψουν από το α4 ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 21 επί 13 (που είναι αριθμοί ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ). Αν κάνουν την ίδια διαδικασία με πριν (όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα) θα παρατηρούν ότι οι πλευρές των ορθογωνίων (που μπορούν να τις υπολογίζουν με το μυαλό, χωρίς χάρακα) είναι πάντα διαδοχικοί όροι της σειράς ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ και ότι ο λόγος τους είναι περίπου σταθερός ίσος με 1,6.
Μετά στο χαρτί που χρησιμοποίησαν μπορούν να φτιάξουν την σπείρα (τέτοιες σπείρες συναντάμε συχνά στην φύση π.χ σαλιγκάρι) και να φέρουν τις διαγώνιους όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Μετά αρκεί να τους δείξουμε την παρακάτω εικόνα (χωρίς λόγια!)

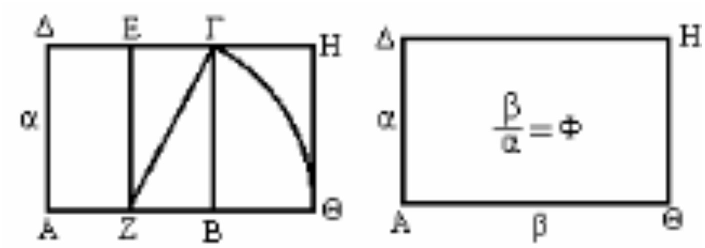


- **Μπορούσε να δημιουργηθεί η σπείρα στο αρχικό χαρτί α4;** (όχι γιατί το σχήμα που παραμένει δεν είναι όμοιο με το αρχικό)

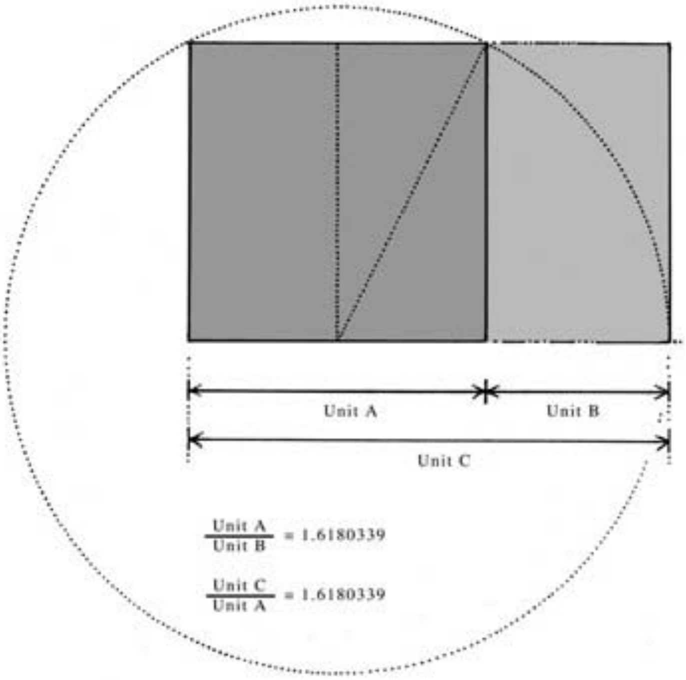
Βέβαια οι αριθμοί ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ απλά προσεγγίζουν τον αριθμό φ. Ο λόγος κάθε αριθμού με τον προηγούμενό του τείνει στον χρυσό αριθμό φ = 1,618… Η κουβέντα λοιπόν μπορεί να επεκταθεί προς διάφορες κατευθύνσεις (π.χ χρυσή τομή ≈ χωρισμός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο = δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β με α > β, βρίσκονται σε μέσο και άκρο λόγο αν: α/β = β/(α – β). Τότε α/β = φ)

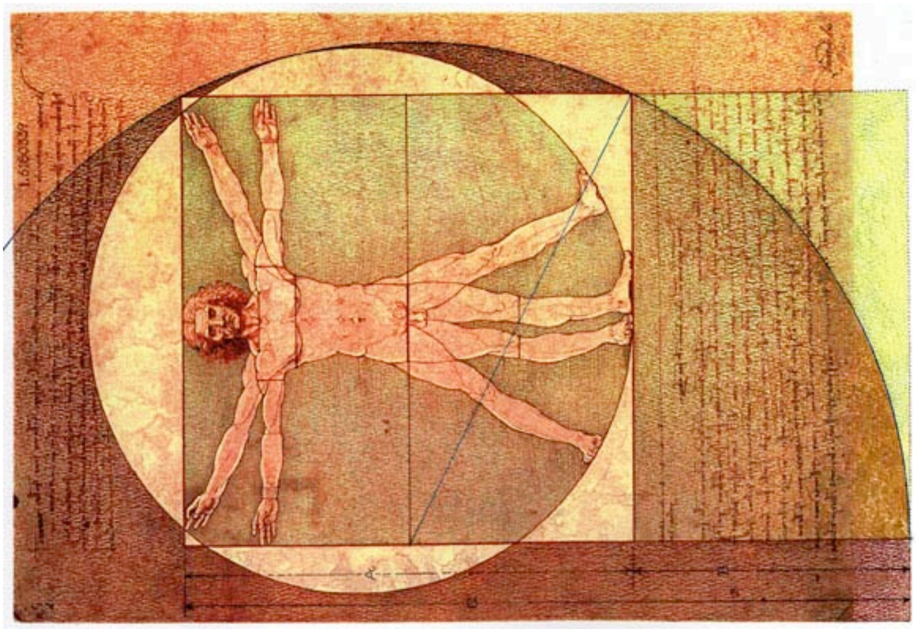
Δηλαδή το κομμάτι ΒΓ είναι τόσο μικρότερο απ' το ΑΒ όσο το ΑΒ απ' το ΑΓ.
ΑΒ / ΒΓ = ΑΓ / ΑΒ = Φ = 1.618...

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν πως μπορούμε να φτιάξουμε (με κανόνα και διαβήτη) **ένα πραγματικά «χρυσό ορθογώνιο».**



Ξεκινάμε από ένα τετράγωνο ΑΒΓΜ. Έστω Ζ το μέσο της ΑΒ. Με κέντρο το Ζ και ακτίνα τη ΓΖ κατασκευάζουμε ένα τόξο κύκλου που τέμνει τη προέκταση της ΑΒ στο Θ. Φέρουμε μετά τη ΘΗ κάθετη στην ΑΘ που τέμνει τη προέκταση της ΜΓ στο Η. Το σχηματιζόμενο με αυτό τον τρόπο ορθογώνιο ΑΘΗΜ είναι ένα χρυσό ορθογώνιο. Πράγματι είναι ΑΘ=β=ΑΖ+ΖΘ=ΑΖ+ΖΓ= α/2+ $\sqrt{(\alpha/2)^2+\alpha^2}$ = α/2+α $\sqrt{5}$ /2 = α($\sqrt{5}$ +1)/2 = αΦ





Έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον να ασχοληθούν με την βιογραφία του Ντα Βίντσι (ο οποίος ήταν και μαθηματικός)
http://el.wikipedia.org/wiki/Λεονάρντο_ντα_Βίντσι

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6η: Με τους πρώτους (και την εικασία του Γκόλντμαχ)

Το βιβλίο αναφέρεται σε πολλές σελίδες του στους πρώτους αριθμούς.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

- ΚΌΣΚΙΝΟ ΤΟΥ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ

Να βρουν τους πρώτους μέχρι το 200. Σε ποιόν αριθμό πρέπει να σταματήσουν να διαγράφουν πολλαπλάσια; (Το βιβλίο δίνει απάντηση σε αυτό το ερώτημα για τον πίνακα έως το 100 στην σελίδα 54.)

- **Ποιοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τους πρώτους;**

➢ Για την εικασία του Γκόλντμπαχ:

Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, (έτσι ώστε για κάθε n □ 2, $2n = p + q$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί).

Στην παρακάτω σελίδα βάζεις έναν άρτιο αριθμό και στον αναλύει σε άθροισμα 2 πρώτων

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?module=tool/number/goldbach.en

Θα μπορούσε λοιπόν να γίνει μια δραστηριότητα στην οποία, υπό μορφής παιχνιδιού θα χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, θα δίνουμε έναν άρτιο και θα προσπαθούν οι ομάδες να τον αναλύσουν σε άθροισμα 2 πρώτων με όσους πιο πολλούς τρόπους μπορούν.

Κατόπιν θα ελέγχονται οι απαντήσεις από το κομπιούτερ. (Καλό είναι πρώτα να έχουμε δείξει στους μαθητές μερικά παραδείγματα) (Για να βρουν τους πρώτους θα χρησιμοποιήσουν το κόσκινο του Ερατοσθένη που θα έχουν φτιάξει όπως περιγράψαμε παραπάνω).

- <u>Συζήτηση :</u> Γιατί οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τους πρώτους;

« Οι πρώτοι αριθμοί είναι αυτό που απομένει αφού αφαιρέσεις όλα τα στερεότυπα. Εγώ πιστεύω ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι *σαν τη ζωή*: είναι πολύ λογικοί αλλά δεν θα μπορούσες ποτέ να επεξεργαστείς τους κανόνες τους, ακόμα και αν έτρωγες όλον σου τον καιρό να τους σκέφτεσαι».

Κρίστοφερ Τζον Φράνσις Μπουν (Πρόκειται για τον μικρό ήρωα του βιβλίου «Ποιος σκότωσε τον σκύλο τα μεσάνυχτα» του Μάρκ Χάντον)

«Για να κατανοήσουμε το Σύμπαν», έγραφε ο Γαλιλαίος τον 17ο αιώνα, «πρέπει να γνωρίσουμε τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο. Και αυτή η γλώσσα είναι τα Μαθηματικά».

Επίσης, Πυθαγόρας: «Τα πάντα είναι αριθμοί»

Μήπως οι αριθμοί έχουν κάποια εσωτερική σχέση, μια απόκρυφη αρμονία και δεν είναι απλά σύμβολα που το ένα ακολουθεί το άλλο;
Η εξιχνίαση αυτών των ιδιαίτερων σχέσεων των αριθμών έχει γοητεύσει τους ανθρώπους από την αυγή του πολιτισμού. Όταν αυτή η διανοητική πρόκληση για τα άλυτα προβλήματα των αριθμών διαμορφώθηκε ως αποδεικτική επιστήμη από τον Πυθαγόρα, ξεκίνησαν τα μαθηματικά. Η έρευνα των σχέσεων μεταξύ των αριθμών (η Θεωρία των Αριθμών ή Αριθμοθεωρία) ήταν πάντα ένας ιδιαίτερος κλάδος των μαθηματικών, μια καθαρή επιστήμη που συχνά γέννησε νέους τομείς στην έρευνα, αν και ως τα μέσα του 20ού αιώνα δεν διέθετε πρακτικές εφαρμογές· τις απέκτησε αναπάντεχα με την εξέλιξη της τεχνολογίας σε τόσο ετερογενείς τομείς όπως η δημιουργία κρυπτογραφικών αλγορίθμων, η έρευνα του DNA, η βελτιστοποίηση της χρήσης της μνήμης των υπολογιστών ή ο προγραμματισμός περίπλοκων τουρνουά τένις. Ο μόνος στόχος της Αριθμοθεωρίας ωστόσο παρέμενε η λύση των γρίφων των αριθμών, επιδεικνύοντας παγερή αδιαφορία για την πρακτική χρησιμότητα των αινιγμάτων με τα οποία καταπιανόταν.
http://www.tovima.gr/default.asp?pid=2&ct=47&artid=122362&dt=14/05/2000

- Βιβλίο: «Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ» του Απόστολου Δοξιάδη

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7η: Με τους γνώμονες

10	11	12	13
5	6	7	14
2	3	8	14
1	4	9	16

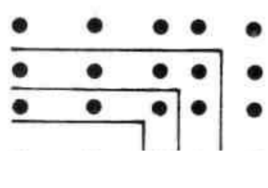
Να συνεχίσουν σε μια κόλλα χαρτί μέχρι τον γνώμονα 100.
Σκοπός μας είναι να βρούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να βρούμε αν ένα νούμερο που θα μας δοθεί είναι στην πάνω δεξιά κορυφή του γνώμονα.
Οι μαθητές θα κάνουν διάφορες υποθέσεις και δοκιμές.
Εδώ θα χρειαστεί να τους βοηθάμε, καθώς δουλεύουν με τις ομάδες τους, για να μην απογοητευτούν, γιατί είναι λίγο δύσκολο και το βιβλίο δεν δίνει πολλές πληροφορίες.

Σιγά- σιγά θα παρατηρήσουν ότι : $3 = 2^2 – 1$, $7 = 3^2 -2$, $13 = 4^2 – 3$, γενικά $κ = ν^2 – (ν – 1)$ ή $κ = ν^2 – ν + 1$, όπου κ ο αριθμός της κορυφής και ν η σειρά του γνώμονα στον οποίο είναι κορυφή.

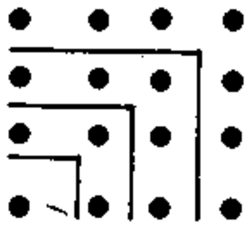
Για να βρουν, για παράδειγμα, ποια κορυφή έχει ο 5ος γνώμονας αρκεί να βάλλουν στην θέση του ν το 5: $κ = 5^2 – 5 + 1 = 21$.
Αν τώρα δοθεί ένα νούμερο, πως μπορούμε να ξέρουμε ότι είναι κορυφή ή όχι;
Κανονικά πρέπει να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση. Οι μικροί όμως μαθητές θα μπορούσαν να σκεφτούν εμπειρικά όπως για παράδειγμα:
το 42 δεν μπορεί δεν μπορεί να είναι κορυφή γιατί τότε το ν θα ήταν 7 και τότε το κ βγαίνει 43.
Επίσης βάση της σχέσης $κ – 1 = ν(ν -1)$, εμείς ξέρουμε ότι το κ είναι πάντα περιττός, αφού το $ν(ν -1)$ είναι πάντα άρτιος. Με κάποιο τρόπο θα μπορούσαμε να τους οδηγήσουμε σε αυτήν την διαπίστωση.

Κατά την γνώμη μου με αυτή την αφορμή μας δίνεται η ευκαιρία να τους μιλήσουμε για τους Πυθαγόρειους Γνώμονες με ένα τρόπο όπως παρακάτω:

- «Για τους Πυθαγόρειους, μας λέει ο Αριστοτέλης ότι ήταν οι πρώτοι που ασχολήθηκαν συστηματικά με τα μαθηματικά και τα προήγαγον, τα προήγαγαν. Και αφού έζησαν και μεγάλωσαν μέσα σε αυτά, πίστεψαν ότι οι αρχές όλων των όντων είναι οι αρχές των μαθηματικών, ότι όλα δηλαδή στον κόσμο και στον ουρανό είναι αριθμοί.
- Μπορούμε να δούμε κάποια σημεία, πως δηλαδή συνέδεαν την φιλοσοφία με τα μαθηματικά και όπως μας λέει ο Αριστοτέλης υπήρχε αλληλεπίδραση σε αυτά. Δηλαδή αρχές της φιλοσοφίας αρχές της φιλοσοφίας, της κοσμοθεωρίας επηρέαζαν τις μαθηματικές τους έρευνες και αντιθέτως η πρόοδος των μαθηματικών ερευνών τους επηρέαζε στην φιλοσοφία τους.
- Θα δούμε κάτι πολύ μικρό πάνω σε αυτό.
- Οι Πυθαγόρειοι μας λέει και ο Αριστοτέλης είχαν δύο αρχές: Το Πέρας και το Άπειρο (γραφή στον πίνακα). Η μύξη αυτών με κάποιο τρόπο δημιουργούσε το Εν, την μονάδα και από κει δημιουργόντουσαν όλοι οι αριθμοί και από κει όλα τα όντα. Αυτό βέβαια είναι αρκετά μεγάλο θέμα. Θα δούμε όμως μια σύνδεση αυτών των βασικών φιλοσοφικών τους αρχών με τους αριθμούς. Συνέδεαν το Πέρας (το πεπερασμένο) με τους περιττούς αριθμούς και το άπειρο με τους άρτιους. Πολύ



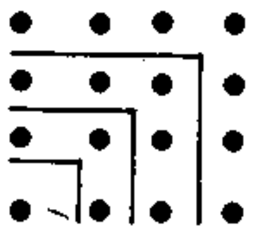
σύντομα να δούμε πως κάνανε μια τέτοια σύνδεση. Συνήθιζαν να



παριστάνουν τους αριθμούς με βότσαλα και να σχηματίζουν διάφορα σχήματα. Με κάποιον τέτοιον τρόπο που θα δείτε εδώ παρίσταναν τους περιττούς. Σχημάτιζαν αυτούς τους γνώμονες όπως τους λέγανε, δηλαδή γνώμονας είναι κάτι που προστιθέμενο σε ένα σχήμα, προκύπτει ένα μεγαλύτερο σχήμα όμοιο με το αρχικό.

- Εδώ μπορείς να πεις ότι είναι ο γνώμονας πέντε ας πούμε εδώ ο γνώμονας τρία και πάει λέγοντας. Αυτοί είναι οι περιττοί αριθμοί. Αυτόματα όπως βλέπετε <u>οι αριθμοί αποκτούν και μια γεωμετρική σημασία</u>. Και έτσι κάπως έβλεπαν οι Πυθαγόρειοι τους αριθμούς: σαν μήκη (μήκος δύο μήκος τρία) και σαν εμβαδά: το ένα και τρία το έβλεπαν ως εμβαδόν τετραγώνου τέσσερα δύο επί δυο τέσσερα. Λίγο διαφορετικά από ότι τους βλέπουμε εμείς σήμερα. Για να δούμε και τους άρτιους τους αντίστοιχους γνώμονες των αρτίων τι σχήμα παίρνανε και να προσπαθήσουμε <u>να δώσουμε μια εξήγηση γιατί βλέπανε τους περιττούς σαν πέρας και τους άρτιους σαν άπειρο</u>.
- (Δεν ξέρω τώρα αν έχει κάποιος κάποια έμπνευση πως τους ήρθε να πουν (τους άρτιους) τους περιττούς πέρας και τους άρτιους άπειρο; Να κάνουν μια τέτοια συσχέτιση;) Εδώ οι προστιθέμενοι περιττοί, οι άπειροι περιττοί, αφήνουν κάτι αναλλοίωτο. Αυτό που αφήνουν αναλλοίωτο είναι το τετράγωνο. Με ποια έννοια: ότι αν διαιρέσεις τις πλευρές του τετραγώνου ο λόγος που θα βρεις είναι πάντα ένα: 2/2 = ένα 3/3 = ένα. Είναι κάτι σταθερό, που μένει σταθερό. Εδώ αντιθέτως έχουμε μια απειρία λόγων. Αυτό είναι 2/3 εδώ 3/4, άλλος λόγος, 4/5 διαφορετικός λόγος. Έχουμε μια απειρία λόγων. Με αυτή την έννοια συνέδεαν αυτό με το άπειρο και αυτό με το πέρας.

- Ας ασχοληθούμε και εμείς με αυτά για να παρατηρήσουμε όπως και οι Πυθαγόρειοι, για αυτό κάναμε και αυτά τα σχήματα, κάποιες ιδιότητες των αριθμών. Να βρούμε κάποιες ιδιότητες των αριθμών.



- **Συμπληρώστε το παραπάνω σχήμα με (τουλάχιστον) 2 ακόμα γνώμονες.**
- **Γράψτε τα αθροίσματα που παρατηρείτε ξεκινώντας από**:

$1 = 1$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 19 = ;$

Γενικά;

- **Πότε το άθροισμα διαδοχικών περιττών είναι άρτιος και πότε περιττός αριθμός; Ελέγξτε αν ισχύει και για μη διαδοχικούς περιττούς.**
- **Τι αριθμός είναι το γινόμενο περιττού επί περιττού και τι το γινόμενο άρτιου επί περιττού;**
- **Τι αριθμός είναι το τετράγωνο ενός περιττού και τι ενός άρτιου;**

Προσπαθήστε να βρείτε αντίστοιχες σχέσεις και από τον γνώμονα με τους αρτίους.

Μπορούν να βρουν ότι:

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2\nu = \nu(\nu + 1)$

Εξήγηση: $2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$ και το 3 είναι το μισό του 6 κλπ.

Άθροισμα αρτίων = άρτιος

Γινόμενο διαδοχικών = άρτιος

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το πραγματικά ζητούμενο είναι να επιτύχουμε την μαθηματική επικοινωνία. Σε αυτό θα συντελέσει το δουν οι μαθητές μας (αλλά και εμείς οι ίδιοι) με διαφορετικό μάτι το *τι είναι τα μαθηματικά* **και** το τι σημαίνει *κάνω μαθηματικά*.

Σωτήρης Συριόπουλος