

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η πορεία από τις πρωτόγονες καταστάσεις προς τον πολιτισμό θα πρέπει να ήταν από την αρχή συναρπαστική. Δυστυχώς, δεν υπάρχουν ιστορικές πηγές που να έχουν σίγουρες αναγνώσεις και να μας επιτρέπουν να ακολουθήσουμε με κάποια επάρκεια τα αρχικά άλματα της ανθρωπότητας από την εποχή που κυριαρχούσαν τα ένστικτα μέχρι την εποχή που πρόβαλε δειλά ο μύθος στα πλαίσια κάπως οργανωμένων κοινωνιών για να ακολουθήσουν η τέχνη, ο φιλοσοφικός στοχασμός, η έννοια της επιστήμης και τάσεις προς τον ορθολογισμό στην Αρχαία Ελλάδα και αλλού. Εντούτοις, η σύγχρονη Αρχαιολογία συνδυαζόμενη με την Ανθρωπολογία και την εξαιρετικά ανεπτυγμένη Τεχνολογία των καιρών μας, μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε βάσιμες εικασίες για κάποια “πετάγματα” της ανθρώπινης σκέψης και για δημιουργήματα τέχνης και τεχνικής, που έγιναν πριν το 1000 π.Χ. και σηματοδότησαν τις μετέπειτα εξελίξεις της ανθρώπινης σκέψης και δημιουργίας μέχρι τις μέρες μας.

Για παράδειγμα, όπως δείχνουν ευρήματα που μπορούν να χρονολογηθούν με γνωστό εύρος λάθους, ο άνθρωπος θα πρέπει να πέρασε από το “ένα δέντρο, δυο ζώα, τρεις ημέρες κ.λπ.” στο “ένα, δυο, τρία κ.λπ.” πριν από το 15000 π.Χ. Τηρουμένων των αναλογιών, αυτό το πέρασμα από το χρηστικό μέτρημα προς τον αφηρημένο αριθμό θα πρέπει να είναι ένα από τα μεγαλύτερα και πιο καθοριστικά για ό,τι ακολούθησε άλματα της ανθρωπότητας καθώς εξελισσόταν αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον και προσπαθώντας να αντιμετωπίσει τα κοινωνικά προβλήματα που εμφανίζονταν και διαλογιζόμενη. Μια επισήμανση που δικαιολογεί τον προηγούμενο χαρακτηρισμό είναι η εξής: το πέρασμα αυτό σηματοδοτεί την ενσωμάτωση της “αφαίρεσης” στην ανθρώπινη σκέψη, δηλαδή το ξύπνημα της έμφυτης (και κατά τον Αριστοτέλη) ικανότητας του ανθρώπου να συνδιαλέγεται με τα ορατά για να τα υπερβεί.

Η ικανότητα αυτή του ανθρώπου σχετίζεται και με ένα από τα χαρακτηριστικά του, που τον διαφοροποιούν από τα ζώα:

όταν μια ανθρώπινη κοινότητα λύσει το βιοποριστικό της πρόβλημα, αρχίζει να ρωτάει “γιατί αυτό είναι έτσι;”, “πώς δομείται το σύμπαν;”... και αισθάνεται πιεστική την ανάγκη να φτάσει στις απαντήσεις, τα “διότι” και τις θεωρίες.

Αυτή η τάση των κάπως κατασταλαγμένων κοινωνιών τεκμηριώνεται καθαρά στη μετά το 1000 π.Χ. εποχή με τις κοινωνικές, φιλοσοφικές, επιστημονικές και καλλιτεχνικές κατακτήσεις και δημιουργίες των Αρχαίων Ελλήνων, που έγραψαν ένα από τα πιο αξιοθαύμαστα κεφάλαια του πολιτισμού, το οποίο σφράγισε τις εξελίξεις.

ΛΙΓΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΟΧΗ 2500 Π.Χ. – 600 Π.Χ.

Στους Αρχαίους Αιγυπτίους και τους Βαβυλώνιους οφείλεται μια από τις πρώιμες σημαντικές περιόδους της εξέλιξης του ανθρώπινου πολιτισμού. Σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά και, ειδικότερα, τη Γεωμετρία που μας ενδιαφέρει εδώ, η συμβολή των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων κατά την περίοδο 2500 π.Χ. – 1000 π.Χ. ήταν, πράγματι, αξιοσημείωτη κυρίως στον τομέα της Πρακτικής Γεωμετρίας που βασιζόταν σε μετρήσεις και αποσκοπούσε στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων: τα τότε Μαθηματικά είχαν κυρίως χρηστικό χαρακτήρα.

Υπάρχουν ιστορικές πηγές που χρονολογούνται πριν το 1700 π.Χ. και δείχνουν ότι οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι και Βαβυλώνιοι ήξεραν να υπολογίζουν εμβαδά και όγκους πολύπλοκων σχημάτων και με ανεκτή προσέγγιση το εμβαδόν ενός κύκλου. Η πολύ ανεπτυγμένη Πρακτική Αριθμητική τους τούς βοήθησε σε αυτό, μολονότι οι κανόνες των πράξεων που χρησιμοποιούσαν δεν ήταν απλοί.

Εικάζεται ότι η Πρακτική Γεωμετρία τους προέκυψε από ανάγκες της καθημερινότητας, όπως είναι η επαναδιάταξη των ορίων των αγρών στις όχθες του ποταμού Νείλου μετά τις ετήσιες πλημμύρες του με διατήρηση του εμβαδού τους, ο υπολογισμός του όγκου πλίνθων για την κατασκευή τοίχων και τειχισμάτων και ο υπολογισμός της χωρητικότητας (του όγκου) αποθηκών. Οι μετρήσεις γίνονταν με σχοινιά που είχαν κόμπους ανά ίσα διαστήματα. Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κόμπων μπορεί να θεωρηθεί ως η τότε μονάδα μήκους. Οι

κύκλοι διαγράφονταν στο έδαφος με τη βοήθεια ενός σχοινοῦ επιθυμητού μήκους, με το ένα άκρο του να μένει σταθερό στο κέντρο και το άλλο να διαγράφει την περιφέρεια του κύκλου. Σύμφωνα με μια εκδοχή, ο προσεγγιστικός υπολογισμός του π (του λόγου του μήκους της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρό του, που χρειάζεται για τον υπολογισμό του μήκους της περιφέρειας και του εμβαδού του κύκλου) γινόταν ως εξής: τοποθετούσαν διαδοχικές φορές το σχοινί με το οποίο έγραφαν τον κύκλο και αντιστοιχούσε στην ακτίνα του πάνω στην περιφέρειά του και διαπίστωναν ότι το μήκος της περιφέρειας ήταν μεγαλύτερο από 6 φορές και μικρότερο από 7 φορές την ακτίνα, οπότε προέκυπτε ότι το π είναι ένας αριθμός μεταξύ του 3 και του 4. Με εκτίμηση του μήκους που περίσσευε ως προς την ακτίνα, μπορούσαν να βρουν πολύ ακριβέστερη τιμή του π .

Τα προηγούμενα αποτελούν μόνο μια μικρή επιλογή από όσα θα μπορούσαν να αναφερθούν για την αλληλεπίδραση της Γεωμετρίας με τον πυρήνα του γίνεσθαι της εποχής των Αρχαίων Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων. Μολονότι έχουν αποδοθεί συνοπτικά, δείχνουν τον χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης αυτής. Δείχνουν δηλαδή ότι τα Μαθηματικά είχαν τότε αναπτυχθεί με στόχο να συμβάλλουν στην κάλυψη των ποικίλων αναγκών της καθημερινότητας και ότι υπηρετούσαν τον στόχο αυτόν με εμφανή την τάση να αναχθούν οι απαραίτητες υπολογιστικές διαδικασίες σε λίγους κανόνες που έλυαν τα παρουσιαζόμενα προβλήματα. Οι κανόνες αυτοί δεν είχαν διατυπωθεί ρητά, αλλά προκύπτουν ως συστηματικές διαδικασίες από τις ιστορικές πηγές που διατηρήθηκαν μέχρι τις ημέρες μας και, κυρίως, από τον λεγόμενο “πάπυρο του Rhind” (γύρω στο 1650 π.Χ.).

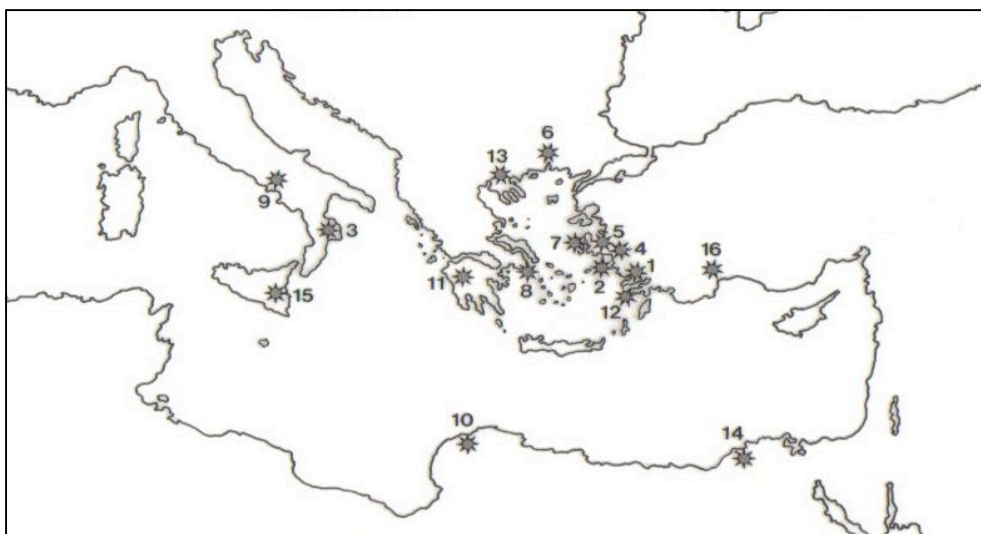
Το πέρασμα από τον συγκεκριμένο και υπολογιστικό τρόπο σκέψης των Αρχαίων Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων προς τον αφηρημένο και συλλογιστικό των Αρχαίων Ελλήνων προϋπέθετε τη διατύπωση ερωτημάτων, οι απαντήσεις στα οποία θα αποτελούσαν διαδοχικά βήματα για το πέρασμα αυτό. Όπως είπαμε, ο άνθρωπος θέτει ερωτήματα που υπερβαίνουν τα ορατά ή τα αναλύουν σε βάθος, όταν έχει λύσει το βιοποριστικό του πρόβλημα με τρόπο ευσταθή στον χρόνο. Μια θεμελιώδης προϋπόθεση για αυτό είναι η κατασκευή γεωργικών εργαλείων

που αυξάνουν την παραγωγικότητα, την γεωργική παραγωγικότητα εν προκειμένω. Η ανακάλυψη του σιδήρου (γύρω στο 2.000 π.Χ. στη Δυτική Ασία που φαίνεται να αξιοποιήθηκε κατάλληλα στον ελλαδικό χώρο μετά τον 11^ο αιώνα π.Χ.) συνετέλεσε στην κατασκευή γεωργικών εργαλείων που εξασφάλιζαν υψηλή (για την εποχή) παραγωγικότητα, με συνέπεια την υπερπαραγωγή γεωργικών προϊόντων, η οποία οδήγησε στην ανάπτυξη του εμπορίου. Η ανάπτυξη αυτή είχε δυο καθοριστικές για την ανάπτυξη της επιστήμης και, γενικότερα, του πολιτισμού επιπτώσεις:

- επέβαλε, τρόπον τινά, την επικοινωνία των κοινωνιών, κυρίως των περιοχών της Αιγύπτου, της Μεσοποταμίας και της Μικράς Ασίας, η οποία προκάλεσε την ώσμωση των ιδεών και των πολιτισμών των επιμέρους κοινωνιών και τη σταδιακή ανάπτυξή τους με βάση τις κοινωνικο - πολιτικές συνθήκες και τις ιδιαιτερότητες της καθεμιάς κοινωνίας χωριστά, και

- δημιούργησε πλούτο σε συγκεκριμένες ομάδες των πληθυσμών, ο οποίος, με την σειρά του, επέτρεπε ελεύθερο χρόνο για να θάλλει ο στοχασμός και να ξυπνήσουν από τη λανθάνουσα κατάσταση που βρίσκονταν οι έμφυτες ικανότητες του ανθρώπου να θέτει ερωτήματα φιλοσοφικού και επιστημονικού χαρακτήρα και να καλλιτεχνεί και παράλληλα να διερευνά θεωρητικά την έννοια του “ωραίου”, προωθώντας την ανέλιξη της ποιότητας της καλλιτεχνικής δημιουργίας μέσα από την ανάδραση θεωρίας και πράξης.

ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΩΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΩΝ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ



Από τα αμέσως προηγούμενα, δεν εκπλήσσει το γεγονός ότι οι πρώτες φιλοσοφικές αναζητήσεις και οι πρώτες προσπάθειες θεωρητικοποίησης της Γεωμετρίας έγιναν στη Μίλητο της Μικράς Ασίας, που ήταν κέντρο διαμετακομιστικού εμπορίου από τις χώρες της νοτιοανατολικής Μεσογείου προς τη δύση και τον βορρά. Δεν εκπλήσσει, επίσης, και το ότι ο αρχαιότερος από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, ο Θαλής ο Μιλήσιος, ήταν γόνος εμπορικής οικογένειας και είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο, την κοιτίδα μιας πολιτισμικής αιχμής της ανθρωπότητας που είχε προηγηθεί εκείνης της Αρχαίας Ελλάδας και επέδρασε ουσιαστικά στους πρώτους Έλληνες φιλόσοφους και μαθηματικούς.

Στον χάρτη φαίνονται οι πόλεις που πρωτοστάτησαν στην ανάπτυξη της Φιλοσοφίας και των Μαθηματικών. Παρατηρείται (εκτός λίγων εξαιρέσεων) μια αξιοσημείωτη χωρική διαδοχή από την Μίλητο προς την Μακεδονία, την Αθήνα και την Κάτω Ιταλία: 1: Μίλητος (Θαλής, Αναξίμανδρος, Αναξίμενης), 2: Σάμος (Πυθαγόρειοι), 3: Κρότωνας (Πυθαγόρειοι), 4: Έφεσος (Ηράκλειτος), 5: Κλαζομενές (Αναξαγόρας), 6: Αβδηρα (Πρωταγόρας, Δημόκριτος), 7: Χίος (Ιπποκράτης), 8: Αθήνα (Σωκράτης, Πλάτων, Θεαίτητος), 9: Ελέα (Παρμενίδης), 10: Κυρήνη (Θεόδωρος, Ερατοσθένης), 11: Ηλεία (Ιππίας), 12: Κνίδος (Εύδοξος), 13: Στάγειρα (Αριστοτέλης), 14: Αλεξάνδρεια (Ευκλείδης), 15: Συρακούσες (Αρχιμήδης), 16: Πέργα (Απολλώνιος). Η ασυνέχεια 2→3 οφείλεται σε πολιτικούς λόγους: ο Πυθαγόρας εκδιώχθηκε από τον τύραννο της Σάμου και κατέφυγε στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας όπου συνέχισε τη λειτουργία της σχολής του.

Οι πρώτες κατακτήσεις της ανθρώπινης σκέψης στην ευρύτερη περιοχή της Ιωνίας, στην οποία ανήκε και η Μίλητος, είχαν κυρίως φιλοσοφικό χαρακτήρα: τα κύρια ερωτήματα που απασχολούσαν τους στοχαστές της εποχής γύρω στο 600 π.Χ. αναφέρονταν στα θεμελιώδη συστατικά που δομούν το σύμπαν και στην έννοια του όντος. Από την αρχή, η στρατηγική για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων έγκειτο στην αναζήτηση των “ελάχιστων” δομικών στοιχείων ή αρχών (δίκην “αξιωμάτων”) που θα μπορούσαν να στηρίξουν μια διαδοχή συλλογισμών και επιμέρους συμπερασμάτων, με τελικό στόχο την κατανόηση φαινομένων και καταστάσεων ή μια κατ’ αρχήν πειστική απάντηση σε προβλήματα φιλοσοφικού χαρακτήρα (π.χ., σχετικά με την έννοια του όντος) που δεν επιδέχονται μονοσήμαντες, κατά συνέπεια ούτε τελικές, απαντήσεις.

Ας γίνουμε κάπως σαφέστεροι με μερικά παραδείγματα που θα αποδοθούν συνοπτικά:

Έγκριτοι συγγραφείς θεωρούν ότι στην εποχή που αναφερόμαστε δεν υπήρχε ουσιαστική διάκριση μεταξύ φιλοσοφικής, πολιτικής και επιστημονικής σκέψης: όλα εντάσσονταν στη Φιλοσοφία, η οποία, έτσι συνολικά θεωρούμενη, εξελίχτηκε σε τρία διαδοχικά στάδια:

- Στο *θεωρητικό - επιστημονικό*, όπου το κύριο ζητούμενο ήταν η εξήγηση - κατανόηση του σύμπαντος μέσα στο οποίο ζουν οι άνθρωποι.

- Στο λεγόμενο *πρακτικό*, με κύριο πρόβλημα τον μικρόκοσμο του ανθρώπου, δηλαδή την κατανόηση της φύσης του, της θέσης του στον κόσμο και των κοινωνικών σχέσεων.

- Και στο στάδιο της *“κριτικής φιλοσοφίας”*, που εμφανίζεται σε περιόδους ωρίμανσης της φιλοσοφικής σκέψης και ασχολείται με θέματα που σχετίζονται (με σημερινούς όρους) με τη Λογική και τις Θεωρίες της Γνώσης. Με λογικές μεθόδους διερευνούσαν κριτικά την επάρκεια των μεθόδων ανάλυσης της δομής του σύμπαντος που χρησιμοποιούσαν οι παλαιότεροι και τους (νοητικούς ή εποπτικούς) μηχανισμούς που διέθεταν για τον έλεγχο της επάρκειας αυτής. Στο επίκεντρο των διερευνήσεων που αφορούσαν τις Θεωρίες της Γνώσης βρίσκονταν ερωτήματα όπως “πού θεμελιώνεται η γνώση μας; στις αισθήσεις, που συχνά μας εξαπατούν;”. Από τέτοιου τύπου ερωτήματα ξεκίνησε η ανάγκη κριτικής, που θίξαμε πριν, για τις μεθόδους ανάλυσης που χρησιμοποιούνταν πριν.

Η νηπιακή κατάσταση των μεθόδων πειραματισμού της εποχής εκείνης (που περιορίζονταν ουσιαστικά σε παρατηρήσεις με πρωτόγονα μέσα) έδωσε προτεραιότητα στον ανθρώπινο στοχασμό, ως “εργαλείου” για τις αναλύσεις που θα απαντούσαν στα ερωτήματα που ανέκυπταν. Και τα τρία προηγούμενα στάδια της Φιλοσοφίας παρουσιάστηκαν στα 400 περίπου χρόνια της “συνολικής πολιτισμικής αιχμής” των Αρχαίων Ελλήνων, αλλά δεν θα μας απασχολήσουν όλα.

Στο πρώτο στάδιο, με τον φιλοσοφικό στοχασμό και τις πειραματικές δυνατότητες σε πρωτόλεια κατάσταση, ήταν μοιραίο οι όποιες αναλύσεις για τη δομή του κόσμου να

στηριχθούν σε “αρχές”, πρωταρχικές αιτίες και δομές, οι οποίες αναδείκνυαν την, συχνά ακόμα και ποιητικού χαρακτήρα, ευρηματικότητα των πρώτων στοχαστών, και αποτελούσαν το σημείο εκκίνησής τους για να διαμορφώσουν (και συλλογιστικά) τις θεωρίες τους. Οι λεπτομέρειες των θεωριών τους υπερβαίνουν τους στόχους του κειμένου αυτού και δεν θα μας απασχολήσουν. Θα αναφέρουμε μόνο τις “αρχές” (δίκην “αξιωμάτων”) τριών από τους πιο γνωστούς Έλληνες φιλοσόφους που (κατά σύμπτωση;) είχαν γεννηθεί στη Μίλητο, με χρονολογική σειρά, για να περάσουμε μετά σε μια ορθολογική θεώρησή τους στον διάλογο “Τίμαιος” του Πλάτωνα, που έγινε με γεωμετρικούς όρους και, για τούτο, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα.

Και οι τρεις φιλόσοφοι φαίνεται να ξεκίνησαν “από την πίστη ότι, κάτω από το φαινομενικό χάος, κρύβεται μια μονιμότητα και ενότητα, που είναι προσιτή, αν όχι στις αισθήσεις μας, οπωσδήποτε στον νου”:

– Ο *Θαλής* θεωρούσε ότι ο κόσμος έγινε από νερό και υδρατμούς. Μια εικασία για το πώς έφτασε ο Θαλής στην “αρχή” αυτή είναι ότι το νερό παρουσιάζεται στη φύση (και μάλιστα άμεσα προσιτό στις αισθήσεις μας), εκτός από υγρό, και υπό στερεά μορφή (πάγος) και υπό τη μορφή υδρατμού. Υπάρχουν και άλλες σχετικές εικασίες.

– Ο *Αναξίμανδρος* είδε τον κόσμο ως ανταγωνιστική σύνθεση, κυρίως μεταξύ τεσσάρων κατά ζεύγη αντίθετων ιδιοτήτων, των “θερμό – ψυχρό” και “υγρό – ξηρό”, που συντηρούν την κυκλική πορεία του κόσμου. Στην αρχή οι αντιθέσεις αυτές βρίσκονταν σε αδράνεια μέσα σε μια μεγάλη και αδιαφοροποίητη μάζα, το “άπειρο” όπως το έλεγε, η οποία σε κάποια στιγμή έχασε την ομοιογένειά της και εμφανίστηκαν οι ιδιότητες αυτές. Με βάση αυτή την “αρχή”, ο Αναξίμανδρος πρότεινε μια θεωρία του σύμπαντος, με το ψυχρό και το υγρό στοιχείο να συμπυκνώνονται σε μια υγρή μάζα στο κέντρο της γης και το θερμό και το ξηρό να παίρνουν τη μορφή μιας πύρινης σφαίρας που “περιέχει το όλον”. Καθώς αυτή η σφαίρα περιστρεφόταν, “διασπάστηκε” σε δακτύλιους *φωτιάς* από τους οποίους προήλθαν ο ήλιος, η σελήνη και τα αστέρια.

- Ο Αναξιμένης, σε αντίθεση με τον Θαλή, θεωρούσε τον αέρα (συμπεριλαμβανομένης και της ομίχλης) ως πρωταρχικό στοιχείο του σύμπαντος. Ο συνήθως αόρατος αέρας μπορεί να συμπυκνωθεί σε νερό και στερεά σώματα. Στον Αναξιμένη, λοιπόν, το πρωταρχικό στοιχείο είχε, τελικά, πολυμορφική υπόσταση. Ως προς αυτό, η σκέψη του φαίνεται να συγγένευε με εκείνη του Θαλή.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ

Ο Πλάτων, που είναι μεταγενέστερος των προηγούμενων, θεωρούσε την ενασχόληση με τα Μαθηματικά και, ιδιαίτερα, με τη Γεωμετρία ως θεμελιώδες προστάδιο για τη σπουδή της Φιλοσοφίας. Εικάζεται ότι η άποψή του αυτή σχετιζόταν με τη θέση του ότι η Γεωμετρία εμπεριέχει και με κατάλληλα προγραμματισμένη διδασκαλία μπορεί να δώσει μεστά στοιχεία παιδείας, κάτι που θα επιδιώξουμε και εμείς, κυρίως την επόμενη χρονιά.

Στην Ακαδημία του Πλάτωνα η ενασχόληση με τη Γεωμετρία συσχετιζόταν και με όρους συμμετρίας και τελειότητας: απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία σε απόλυτα συμμετρικά σχήματα, όπως είναι ο κύκλος. Τα σήμερα γνωστά ως “Πλατωνικά στερεά” είναι τα “κανονικά πολύεδρα”, δηλαδή στερεά και κυρτά σχήματα που έχουν έδρες ίσα μεταξύ τους “κανονικά πολύγωνα” και με τον ίδιο αριθμό πολυγώνων να συναντούνται σε κάθε κορυφή τους. Όπως θα δούμε (επίσης την επόμενη χρονιά), υπάρχουν ακριβώς πέντε “κανονικά στερεά”.

Όπως συνάγεται από τον διάλογο “Τίμαιος” του Πλάτωνα, τα κανονικά αυτά στερεά είχαν ιδιαίτερη σημασία στην Πλατωνική κοσμολογία: στον διάλογο αυτό προτείνεται μια θεωρία για τη δομή του σύμπαντος, στην οποία τα πέντε “Πλατωνικά στερεά” παίζουν καθοριστικό ρόλο. Πιο συγκεκριμένα, ο Πλάτων, συνδυάζοντας τις ιδέες των προγενέστερων του φιλοσόφων, θεωρούσε ότι τα αισθητά αποτελούνται από κατάλληλο συνδυασμό τεσσάρων βασικών στοιχείων: τη φωτιά, τη γη, τον αέρα και το νερό. Αντιστοιχούσε:

- τη φωτιά στο κανονικό τετράεδρο,

- τη γη στον κύβο,
- τον αέρα στο κανονικό οκτάεδρο και
- το νερό στο κανονικό εικοσάεδρο.

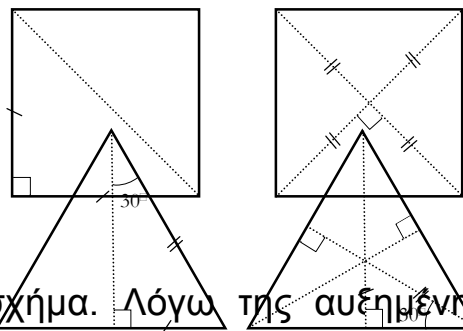
Στο κανονικό δωδεκάεδρο (που φαίνεται να ανακαλύφθηκε τελευταίο) επεφύλασσε τον ρόλο του ουράνιου θόλου, που περικλείει τα πάντα και δεν επιδέχεται επιμερίσεις.



□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□
 □□□□□□□□□□:

Σε ό,τι μας αφορά εδώ, το ενδιαφέρον έγκειται στα εξής: Οι γεωμέτρεις της εποχής ήξεραν ότι τα κανονικά πολύγωνα που συναποτελούν τις επιφάνειες των τεσσάρων πρώτων κανονικών στερεών ήταν είτε τετράγωνα (στον κύβο), είτε ισόπλευρα τρίγωνα (στα υπόλοιπα τρία κανονικά στερεά). Ένα τετράγωνο χωρίζεται σε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, δυο με τη μια διαγώνιό του και τέσσερα με τις δυο διαγωνιές του, όπως στο σχήμα.

Αντίστοιχα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο χωρίζεται, με το ύψος του, σε δύο ορθογώνια τρίγωνα με την ιδιότητα η μια κάθετη πλευρά τους να είναι το μισό της υποτείνουσας (ή, ισοδύναμα, η απέναντι της κάθετης πλευράς γωνία να είναι 30°) ή, με τα τρία ύψη του, σε έξη τέτοια τρίγωνα, όπως στο σχήμα. Λόγω της αυξημένης συμμετρίας του, ο Πλάτων θεωρούσε τη διαίρεση ενός ισοσκελούς τριγώνου σε έξη ορθογώνια τρίγωνα.



Ένας από τους πιθανούς λόγους για να θεωρήσει ο Πλάτων ότι τα κανονικά πολύγωνα των πλευρών των κανονικών στερεών διαιρούνται περαιτέρω σε ορθογώνια τρίγωνα, έστω

και δυο ειδών, θα μπορούσε να είναι το ότι ήθελε ενιαία μορφή (ορθογώνια τρίγωνα) στα έσχατα δομικά στοιχεία των αισθητών.

Τις προηγούμενες ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων θα τις αποδείξουμε λεπτομερώς κατά τη διάρκεια αυτής της χρονιάς. Προς το παρόν, θα τις δεχτούμε για να δούμε με ποιο τρόπο διευκόλυναν τον Πλάτωνα να προσδώσει ορθολογική χροιά στις κοσμολογικές θεωρίες της εποχής:

Όπως είπαμε, ο Πλάτων στον “Τίμαιο” πρότεινε τα τέσσερα πρώτα κανονικά στερεά ως μοντέλα για τα δομικά στοιχεία του κόσμου (τη φωτιά, τη γη, τον αέρα και το νερό), τα οποία είχαν θεωρήσει και οι προγενέστεροι φιλόσοφοι. Προχωρούσε, όμως, ακόμα περισσότερο: θεωρούσε ότι τα κανονικά στερεά συντίθενται από τα δυο είδη τριγώνων που προαναφέραμε, οπότε θα μπορούσαν να διαλυθούν στα τρίγωνα αυτά και να ανασυντεθούν δίνοντας, ενδεχομένως, άλλα κανονικά στερεά, δηλαδή να μεταπλαστούν από ένα δομικό στοιχείο σε ένα άλλο. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο νερού, που αντιστοιχεί στο κανονικό εικοσάεδρο, μπορούσε, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, να διαλυθεί και, υπό συνθήκες, να προκαλέσει κατόπιν τη σύνθεση δυο στοιχείων αέρα (δυο κανονικά οκτάεδρα) και ενός στοιχείου φωτιάς (ένα κανονικό τετράεδρο), αφού, αν μείνουμε στα ισόπλευρα τρίγωνα που είναι πλευρές των κανονικών εικοσαέδρων, οκταέδρων και τετραέδρων, τα 20 ισόπλευρα τρίγωνα του κανονικού εικοσαέδρου μπορούν να ανασυντεθούν σε $2 \cdot 8 = 16$ ισόπλευρα τρίγωνα που δίνουν δυο κανονικά οκτάεδρα και σε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα που δίνουν ένα κανονικό τετράεδρο.

Με αυτήν την έννοια, ο Πλάτων προσέδωσε ορθολογική χροιά στις θεωρίες για τη δομή του κόσμου: από τη μια μεριά, πρότεινε γεωμετρικά μοντέλα για τα φυσικά δομικά στοιχεία των προγενέστερων και, από την άλλη, ακριβώς λόγω της γεωμετρικής δομής των μοντέλων (των κανονικών στερεών), μπόρεσε να προτείνει και μια εξήγηση για το γεγονός ότι, π.χ., το νερό εξατμίζεται (υπό συνθήκες βέβαια) σε υδρατμούς, δηλαδή σε αέρα: δυο στοιχεία νερού (δυο εικοσάεδρα) συναποτελούνται από 40 ισόπλευρα τρίγωνα, δηλαδή $5 \cdot 8$

ισόπλευρα τρίγωνα, και έτσι, διαλυόμενα και ανασυντιθέμενα, μπορούν να δώσουν πέντε στοιχεία υδρατμών.

Οι θεωρίες αυτές του Πλάτωνα δεν είναι σήμερα αποδεκτές, αφού ο ανθρώπινος στοχασμός, ως προωθητική διαδικασία τόσο της φιλοσοφίας, όσο (και κυρίως) της επιστήμης, έχει προχωρήσει πολύ πιο πέρα από όσα είχαν κατακτηθεί τότε. Όσα προηγήθηκαν δεν στόχευαν στην παρουσίαση μιας αποδεκτής κοσμολογικής θεωρίας, αλλά προτείνονται ως ένα εύγλωττο παράδειγμα που στοιχειοθετεί την άποψη ότι “η Γεωμετρία αλληλεπιδρούσε (και εξακολουθεί να αλληλεπιδρά) με τον πυρήνα του γίγνεσθαι σε κάθε εποχή”, οπότε ενισχύεται η θέση ότι “η Γεωμετρία δεν είναι μόνο ένας από τους γόνιμους κλάδους των Μαθηματικών με διακλαδικές προεκτάσεις, αλλά και πολιτισμικό αγαθό”.

ΟΙ ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σε αυτό το κλίμα πνευματικών αναζητήσεων άνθισε η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι η Γεωμετρία του Ευκλείδη αποτελεί την αποκρυστάλλωση του γενικότερου στοχαστικού πνεύματος της εποχής στον τομέα της τότε αναδυόμενης επιστήμης, όπου η Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά (κυρίως ως Γεωμετρία και Θεωρία Αριθμών) ακολουθούσαν τότε “βίους παράλληλους”.

Οι βάσεις της λογικής των συλλογιστικών διαδικασιών του Ευκλείδη είχαν τεθεί ήδη από τους Προσωκρατικούς, οι οποίοι είχαν επεξεργασθεί λογικούς κανόνες συμπερασμού. Ωστόσο, το ουσιαστικό πλαίσιο ανάπτυξης μιας επιστημονικής θεωρίας όπως την εννοούμε σήμερα διαμορφώθηκε από τον Αριστοτέλη, ο οποίος δεν δεχόταν τον “κόσμο των ιδεών” του Πλάτωνα και θεωρούσε ότι οι αφηρημένες ιδέες, επομένως και οι μαθηματικές, δημιουργούνται από την έμφυτη ικανότητα του ανθρώπου να συνδιαλέγεται με τα ορατά και να τα υπερβαίνει προς το αφηρημένο και το γενικό.

Η βασική, επιστημολογικού χαρακτήρα, θέση του Αριστοτέλη ήταν ότι οι “μαθηματικές αλήθειες” (οι οποίες, κατά τον Πλάτωνα, ήταν δεδομένες στον “κόσμο των ιδεών”) κατακτώνται μόνο με Προτάσεις – Θεωρήματα που

διατυπώνονται σύμφωνα με το σχήμα “Αν..., τότε...” και έπρεπε να αποδειχτούν. Οι αποδείξεις έπρεπε να προκύπτουν με συλλογισμούς, οι οποίοι θα διαδέχονται ο ένας τον άλλο σύμφωνα με λογικούς κανόνες. Αυτή η θέση του Αριστοτέλη, που διατηρεί την ισχύ της και σήμερα, θα πρέπει να βρίσκεται πίσω από το έργο του για τη Λογική, που είναι, ίσως, το πιο ώριμό του με βάση τις σημερινές απόψεις.

Οι συλλογισμοί μπορούσαν να βασισθούν και σε Προτάσεις που είχαν αποδειχτεί πριν. Αλλά, διατρέχοντας μια σειρά συλλογισμών προς τα πίσω, θα φτάσουμε σε πρώτες “παραδοχές”, τις οποίες θα πρέπει να δεχτούμε ως “αληθινές” για να στηρίξουμε πάνω σε αυτές το οικοδόμημα της θεωρίας που μας ενδιαφέρει. Οι “παραδοχές” αυτές είναι τα “αξιώματα” (και τα “αιτήματα”) του Ευκλείδη, αλλά και των σύγχρονών μας θεωριών εντός και εκτός των Μαθηματικών. Επειδή τα “αξιώματα” είναι πρωταρχικά, θα έπρεπε να είναι άμεσα αποδεκτά, να μην περιέχουν δηλαδή εύκολα αμφισβητούμενες αποφάνσεις. Για παράδειγμα, ένα από τα πρώτα “αξιώματα” του Ευκλείδη ήταν ότι “από δυο (διαφορετικά) σημεία περνάει ακριβώς μια ευθεία”. Ας σημειωθεί εδώ ότι σήμερα το “αποδεκτό των αξιωμάτων” δεν σημαίνει απαραίτητα ότι οι αποφάνσεις τους πρέπει να αντανakλούν “αλήθειες της φύσης”, μολονότι αυτό είναι συχνά επιθυμητό. Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό του “αποδεκτού” αποδίδεται σήμερα με την απαίτηση η απόφαση του αξιώματος να μην αντίκειται στη Λογική.

Με αυτόν τον λογικά δομημένο τρόπο, οι φιλόσοφοι και οι γεωμέτρεις της εποχής (μέχρι το 300 π.Χ. περίπου) προσάρμοσαν το πλαίσιο της σκέψης και της δημιουργικότητάς τους στο γενικότερο πνεύμα της εποχής τους: την αναγωγή ενός φαινομένου, μιας κατάστασης ή ενός σύνθετου αφηρημένου προβληματισμού σε θεμελιώδεις “αρχές” που διέπουν το προς διερεύνηση (εποπτικό ή αφηρημένο) αντικείμενο, ώστε με βάση τις “αρχές” αυτές να αναδομηθεί συλλογιστικά το αντικείμενο αυτό. Στη Γεωμετρία οι “αρχές” αυτές είναι τα “αξιώματα” και, όπως πιστεύεται σήμερα, το αντικείμενό της ήταν η κατανόηση της δομής (της γεωμετρίας) του χώρου της εποπτείας.

Έξω από την τελική εγκυρότητα της επιστημονικής ανάλυσης, που εξαρτάται από τα “αξιώματα” που έχουν επιλεγεί, ένα βασικό πλεονέκτημα του τρόπου αυτού προσέγγισης της “αλήθειας” αντιστοιχεί στα εξής:

- Κατά τη σταδιακή ανάπτυξη της θεωρίας που θα οδηγήσει στην κατανόηση του αντικειμένου (ή ακόμα και θα το δημιουργήσει, όπως συμβαίνει στα σύγχρονα Μαθηματικά) προκύπτουν ενδιάμεσα συμπεράσματα που αποκαλύπτουν μη αναμενόμενα στοιχεία, ιδιότητες ή συμμετρίες του.

- Κάποια από τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να ελεγχθούν πειραματικά ή συλλογιστικά ως προς το αν αντιφάσκουν με άλλα συμπεράσματα ή με τη λογική μας.

- Αν ένας τέτοιος έλεγχος δείξει ότι κάποιο από τα συμπεράσματα αυτά δεν είναι αποδεκτό και είμαστε σίγουροι ότι δεν υπάρχει λάθος στους συλλογισμούς μας, τότε θα πρέπει να ανατρέξουμε στα (λίγα) “αξιώματά” μας και να αναζητήσουμε την αιτία του λάθους. Αυτή η διαδικασία οδηγεί στην “αυτο - διόρθωση” του εκάστοτε θεωρούμενου αξιωματικού συστήματος και είναι εφικτή, επειδή τα “αξιώματα” είναι λίγα και είναι διατυπωμένα με απλούς όρους.

Άλλωστε, όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε κάτι ως “όλον” και αυτό συντίθεται με αδιαφανείς δομές από ποικίλα στοιχεία, θα το κατανοήσουμε μάλλον επιφανειακά και επιπόλαια, αφού έτσι, με γενικές θεωρήσεις, είναι δύσκολο έως αδύνατο (ανάλογα με τη συνθετότητα αυτού του “όλου”) να δούμε στο “εσωτερικό” του τις κρίσιμες λεπτομέρειες και τους αλληλοσυσχετισμούς τους που αποτελούν προϋπόθεση για τη βαθύτερη, την κάτω από την επιφάνεια, κατανόησή του. Επιπλέον, όπως θα δούμε και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που θα μελετήσουμε κάπως διεξοδικά, η πορεία για την αναδόμηση μιας θεωρίας από τα “αξιώματά” της μας αποκαλύπτει, όπως προαναφέραμε, και στοιχεία της “εσωτερικής συμμετρίας - αισθητικής” αυτής της θεωρίας. Για παράδειγμα, μας αποκάλυψε ότι τα βασικά στοιχεία του θεμελιώδους ευθύγραμμου σχήματος, του τριγώνου, όπως είναι τα ύψη, οι διχοτόμοι των γωνιών του και οι διάμεσοί του, συσχετίζονται με βάση “νόμους” που αναδεικνύουν ένα είδος “αρμονίας” και “συμβατότητας” στη

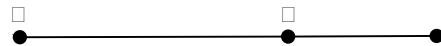
συμπεριφορά τους: τόσο τα ύψη ενός τριγώνου, όσο και οι διχοτόμοι των γωνιών του και οι διάμεσοί του περνάνε από ένα σημείο, εν γένει διαφορετικό για κάθε είδος στοιχείου.

Σε ό,τι αφορά τον ρόλο των λεπτομερειών στην αλληλεπίδραση Γεωμετρίας και πολιτισμού, θα σημειώσουμε και το εξής: οι αρχαίοι Έλληνες αρχιτέκτονες ονόμαζαν “συμμετρία” την κατάσταση ή το τεχνικό επίτευγμα στο οποίο τα μέρη βρίσκονται στην “σωστή αναλογία” μεταξύ τους και με το όλον. Η “αναλογία” στην Αρχιτεκτονική και τη Ζωγραφική έχει τον “ρυθμό” ως αντίστοιχό της στη Μουσική και στην Ποίηση, όπου ο καταμερισμός του χρόνου παίζει καθοριστικό ρόλο.

Ειδικά η αναλογία, ορίζεται ως η ισότητα δυο λόγων. Προς το παρόν, ο “λόγος” δυο συγκρίσιμων μεγεθών, δηλαδή δυο μεγεθών που μπορούν να μετρηθούν με την ίδια μονάδα μέτρησης, ταυτίζεται με το κλάσμα που έχει ως όρους τα “μέτρα” των μεγεθών (τα αριθμητικά αποτελέσματα της μέτρησής τους με τη συγκεκριμένη μονάδα). Τα μεγέθη αυτά μπορούν να είναι, π.χ., βάρη, ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες ή εμβαδά. Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε για ευθύγραμμα τμήματα, ας πούμε για τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ σε ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο που αντιστοιχούν σε μήκη α και β εκατοστών, αντίστοιχα, τότε ως λόγο $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ των δυο αυτών ευθυ-

γράμμων τμημάτων θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$.

Με αυτά υπ’ όψιν, γυρνάμε στη “συμμετρία”, που προαναφέραμε, και στη “σωστή αναλογία”, που τη χαρακτηρίζει κάθε φορά. Όπως είχαν παρατηρήσει και στην Ακαδημία του Πλάτωνα, σε μια (μη τετριμμένη) αναλογία υπεισέρχονται τουλάχιστον τρία (αναγκαστικά συγκρίσιμα, με την προηγούμενη έννοια) μεγέθη. Μια τέτοια αναλογία μπορεί να προκύψει από τη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος AB με ένα σημείο Γ (όπως στο σχήμα) έτσι, ώστε τα “μέρη” (δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ) να βρίσκονται στη “σωστή αναλογία” μεταξύ



τους και με το “όλον” (το AB στην προκειμένη περίπτωση). Αυτά σημαίνουν ότι θα ισχύει:

$$\text{(λόγος “μερών”)} \frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \text{(λόγος “όλου” προς το “σωστό μέρος”).}$$

Η αναλογία αυτή δηλώνει ότι έχουμε διαιρέσει το AB με τη “χρυσή τομή” που σχετίζεται με την αισθητική απόλαυση ως εξής: ένα ορθογώνιο (π.χ., το ορθογώνιο στο οποίο εγγράφεται,

“με το αέτωμα της”, μια πλευρά του Παρθενώνα) δίνει το καλύτερο αισθητικό αποτέλεσμα, όταν οι πλευρές του ΑΓ και ΓΒ (όπως στο διπλανό σχήμα) ικανοποιούν

$$\text{την αναλογία } \frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ}, \text{ η}$$

οποία διαφέρει από την

προηγούμενη μόνο κατά το ότι το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα AB έχει αντικατασταθεί από το $ΑΔ = ΑΓ + ΓΒ$.

Αυτά επιτάσσουν η “συμμετρία ως φιλοσοφικό αξίωμα” και η ερμηνεία της στην Αρχιτεκτονική. Το ερώτημα πώς κατασκευάζεται θεωρητικά και πρακτικά ένα τέτοιο ορθογώνιο είναι αντικείμενο της Γεωμετρίας και θα μας απασχολήσει αυτή τη χρονιά.

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΩΝ ΑΙΧΜΩΝ ΤΗΣ ΑΝΘΡΩΠΟΤΗΤΑΣ

Όπως είπαμε, η Γεωμετρία του Ευκλείδη μπορεί να θεωρηθεί ως η αποκρυστάλλωση του γενικότερου πνεύματος της εποχής (600 π.Χ. – 200 π.Χ.) στον τομέα της επιστήμης. Στην εποχή αυτή συντελέστηκε στην ευρύτερη Αρχαία Ελλάδα μια από τις πιο σημαντικές “συνολικές πολιτισμικές αιχμές της ανθρωπότητας”, με την έννοια ότι τότε όλες οι αναζητήσεις – διερευνήσεις στα επίπεδα του επιστημονικού - φιλοσοφικού στοχασμού και των κοινωνικο - πολιτικών διεργασιών πήραν μια εντελώς καινούργια μορφή, απέκτησαν μια πρωτόγνωρη

ποιότητα και έφτασαν σε υψηλό βαθμό ωριμότητας, που καθόρισε τις μετέπειτα εξελίξεις, κυρίως σε ό,τι αφορά τον λεγόμενο “δυτικό πολιτισμό”.

Ας σταχυολογήσουμε μερικά από τα σχετικά επιτεύγματα, σχολιάζοντάς τα συνοπτικά:

- Σε κάποιες πτυχές των φιλοσοφικών και μαθηματικών κατακτήσεων της εποχής αναφερθήκαμε πριν. Εδώ θα περιοριστούμε να δώσουμε και πάλι έμφαση στο γεγονός ότι το θεμελιώδες στοιχείο κατά τις αναζητήσεις των τότε φιλοσόφων ήταν η προσπάθεια αναγωγής σε λίγες “βασικές αρχές”, δίκην “αξιωμάτων”, πάνω στις οποίες στήριζαν τους συλλογισμούς τους για την ανάπτυξη της θεωρίας τους. Σε ό,τι αφορά την ποιότητα του έργου των στοχαστών αυτών, η οποία συμβάλλει στο να θεωρηθεί η εποχή αυτή ως “συνολική πολιτισμική αιχμή της ανθρωπότητας”, αρκεί να σημειώσουμε ότι η σκέψη τους είναι ακόμα και σήμερα επίκαιρη στους φιλοσοφικούς κύκλους όλων των επιπέδων.

- Το φιλοσοφικό - κοινωνικό περιβάλλον στην Αρχαία Αθήνα ήταν έντονα ανθρωποκεντρικό: έδινε προτεραιότητα στα “γιατί”, που απασχολούσαν τον άνθρωπο, και στις ιδέες και τις πρακτικές που θα ευόδωναν την κοινωνική συμβίωση. Ακόμα και η Τέχνη ήταν αντίστοιχα ανθρωποκεντρική. Σαφής εκπρόσωπος του ανθρωποκεντρισμού της εποχής ήταν ο σοφιστής Πρωταγόρας, που πίστευε ότι “το μέτρο όλων των πραγμάτων είναι ο άνθρωπος”.

Στο πλαίσιο των κοινωνικο - πολιτικών διεργασιών της εποχής που μας απασχολεί, τόσο στα κείμενα των θεωρητικών, όσο (και κυρίως) σε ό,τι αφορά την άμεση Δημοκρατία στην Εκκλησία του Δήμου των Αρχαίων Αθηνών, η προσπάθεια των ρητόρων να πείσουν το ανομοιογενές ακροατήριό τους στηριζόταν σε μια δομή λόγου, η οποία μπορεί να αποδοθεί με το σχήμα: διατύπωση των “βασικών αρχών” των απόψεών τους (δίκην “αξιωμάτων”) και επιχειρηματολογία με συλλογισμούς που βασιζόνταν στις “αρχές” αυτές (δίκην “αποδεικτικών διαδικασιών”), οι οποίες αποσκοπούσαν στο να πείσουν τους αναγνώστες τους (οι θεωρητικοί) ή το ακροατήριό τους (οι

ρήτορες), οπότε στους συλλογισμούς τους ελάμβαναν υπ' όψιν και τον "κοινό νου".

Τέτοιου τύπου "αρχές" αναφέρονται και στο έργο του Ηρόδοτου, όπου, π.χ., διαβάζουμε:

- "Οι άριστοι άνδρες σκέπτονται και αποφασίζουν άριστα" (για το ολιγαρχικό πολίτευμα).
- "Δεν υπάρχει καλύτερο από τον έναν άνδρα, τον άριστο" (για το μοναρχικό πολίτευμα).
- "Όλα ενυπάρχουν στους πολλούς" (για το δημοκρατικό πολίτευμα).

Όπως συμβαίνει πάντα όταν αναφέρεται κανείς στο κοινωνικό σύνολο, οι "αρχές" αυτές και το περιεχόμενο των συλλογισμών που στηρίζονται σε αυτές έχουν και υποκειμενικό χαρακτήρα, οπότε οδηγούν σε πολλές "αλήθειες" που άλλους πείθουν και άλλους όχι. Εξαιτίας αυτού, παίζει σημαντικό ρόλο η δομή της γραφής (για τους θεωρητικούς) ή του λόγου (για τους ρήτορες). Η επισήμανση αυτή συνέβαλλε στην εμφάνιση της Ρητορικής, η οποία συσχετίσθηκε με την άμεση Δημοκρατία, όπως τη βίωναν οι Αθηναίοι πολίτες. Ο στόχος της Ρητορικής έγκειτο στο να διαμορφωθούν κανόνες (επιμέρους "ρητορικά σχήματα"), οι οποίοι θα ενίσχυαν την πειστικότητα των συλλογισμών από τις "αρχές" προς τις εκάστοτε τελικές προτάσεις ή παραινέσεις. Οι πρώτοι δάσκαλοι της Ρητορικής ήταν οι Σοφιστές που, για τούτο, θεωρήθηκαν επικίνδυνοι και διώχθηκαν. Η Ρητορική, ως σύνολο κανόνων και ενδεικτικών προτάσεων που ενισχύουν την πειστικότητα ενός δοκιμίου ή ενός λόγου, εξελίχθηκε έκτοτε (κυρίως με αφετηρία τις σχετικές επεξεργασίες του Αριστοτέλη) μέχρι τις ημέρες μας, όπου η σύγχρονη Ρητορική αντλεί ιδέες και από τις δημοσκοπήσεις.

• Στον τομέα της επιστήμης, εκτός από την επανάσταση που σηματοδότησε η Γεωμετρία του Ευκλείδη (που θίξαμε πριν), υπήρξαν επίσης ουσιώδεις ποιοτικές αλλαγές και σε άλλους κλάδους. Για παράδειγμα:

- Η Ιστορία, με τον Θουκυδίδη, έσπασε το φράγμα των μύθων και άρχισε να αποκτά χαρακτηριστικά επιστήμης, όπως νοείται σήμερα.

- Ο Ιπποκράτης ο Κώος έθεσε τις βάσεις για να εξελιχθεί η Ιατρική στη σημερινή της μορφή, δηλαδή ένας επιστημονικός κλάδος που συνδυάζει αποτελεσματικά την κριτική παρατήρηση με τη θεωρητική προέκτασή της.

• Το θέατρο, που μπορεί να θεωρηθεί ως το διαχρονικά πιο ώριμο επίτευγμα της Αρχαίας Ελλάδας (με την έννοια ότι διατηρεί την αποδοχή και την επικαιρότητά του ακριβώς όπως διαμορφώθηκε τότε και όχι εξελιγμένο), έζησε την εποχή μεταξύ 500 π.Χ. και 380 π.Χ. μεγάλες στιγμές τόσο σε ό,τι αφορά την ποσότητα, όσο (και κυρίως) την ποιότητα της συγγραφής τραγωδιών και κωμωδιών. Ένας από τους λόγους γι αυτό ήταν και το ότι η “διδασκαλία” των τραγωδιών και των κωμωδιών εντάσσονταν σε ένα πλαίσιο “σχολείου δημοκρατίας”, οπότε τα θέματα των θεατρικών έργων είχαν να κάνουν με βαθύτερες αξίες των ανθρώπων και των κοινωνιών, κάτι που αναγνωρίζεται με έμφαση σήμερα. Αυτό το πλαίσιο ίσως να ευθύνεται και για το γεγονός ότι ο Αισχύλος, ο Ευριπίδης, ο Σοφοκλής και ο Αριστοφάνης είχαν θεωρήσει τη Ρητορική ως ένα από τα εργαλεία τους για να αυξήσουν την ποιότητα και την ευστοχία του θεατρικού τους λόγου.

• Η Γλυπτική και η Αρχιτεκτονική έζησαν και αυτές τότε μια περίοδο ποιοτικής και ποσοτικής κορύφωσης, με τον Παρθενώνα να αποτελεί σήμερα μνημείο πολιτισμού της ανθρωπότητας για όλες τις εποχές. Επειδή τα επιτεύγματα αυτά σχετίζονται και με τη Γεωμετρία, χρήζουν λεπτομερέστερης ανάλυσης, για την οποία ο χώρος που διαθέτουμε εδώ δεν επαρκεί. Γι αυτό δεν θα επεκταθούμε σε σχετικές λεπτομέρειες, ευελπιστώντας να βρεθεί ειδικός χρόνος προς τούτο.

Σε αυτήν την ποσοτική και ποιοτική κοσμογονία του πολιτισμού στο σύνολό του, η Γεωμετρία, ως κλάδος των διαχρονικών Μαθηματικών, έζησε την πρώτη (από τις συνολικά τρεις) περιόδους ριζικής μεταμόρφωσής της, από την Πρακτική Γεωμετρία των Αρχαίων Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων πέρασε σε άλλο, ασύγκριτα ποιοτικότερο επίπεδο: σε εκείνο του επιστημονικού κλάδου με τη σύγχρονη έννοια του όρου.

Το γεγονός ότι η Γεωμετρία (με τη μορφή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) πέρασε σε ουσιαστικά ποιοτικότερο στάδιο στα πλαίσια της “συνολικής πολιτισμικής αιχμής της ανθρωπότητας” που συντελέστηκε στην Αρχαία Ελλάδα δεν είναι καθόλου τυχαίο: το ίδιο, τηρουμένων των αναλογιών, συνέβη και σε άλλες δυο “συνολικές πολιτισμικές αιχμές της ανθρωπότητας”, στις οποίες θα αναφερθούμε απλώς με γενικότητες που τις σηματοδοτούν, διότι η ανάλυση σχετικών λεπτομερειών προϋποθέτει γνώσεις που λείπουν από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου. Πάντως, ακόμα και από τα λίγα που θα θίξουμε, τεκμηριώνεται ο χαρακτηρισμός της Γεωμετρίας, ως του κλάδου για τον οποίο *οι εποχές ριζικής ποιοτικής μεταλλαγής του συμπίπτουν με τις εποχές “συνολικών πολιτισμικών αιχμών της ανθρωπότητας”*.

- Μια δεύτερη “συνολική πολιτισμική αιχμή της ανθρωπότητας” συντελέστηκε μεταξύ 1300 και 1700 μ.Χ., δηλαδή κατά την Αναγέννηση και λίγο μετά, κυρίως στη Δυτική Ευρώπη, με αφετηρία την “αναγέννηση” της Τέχνης (που αναδεικνύεται από το έργο των Giotto, Brunelleschi, della Francesca και Dürer) και κατάληξη την εμφάνιση της “δυναμικής” άποψης των Μαθηματικών, η οποία “αναγέννησε” τη Φυσική με τη θεωρία του Newton.

Η Γεωμετρία την εποχή αυτή εξελίχθηκε ποιοτικά σε δυο κατευθύνσεις:

- Οι ζωγράφοι της εποχής (κυρίως οι καλλιτέχνες που προαναφέραμε), στην προσπάθειά τους να βρουν τους κανόνες “ζωγραφικής με προοπτική”, έφτασαν σε συμπεράσματα που εντάσσονται στη σύγχρονη Προβολική Γεωμετρία, έναν “μη Ευκλείδειο” κλάδο της Γεωμετρίας, ο οποίος κατοχυρώθηκε ως πλήρως αποδεκτός μαθηματικός κλάδος περίπου 300 χρόνια μετά. Εδώ, όπως ισχυριζόταν και ο Αριστοτέλης, η Τέχνη προέτρεξε σαφώς της επιστήμης των Μαθηματικών, σφυρηλατώντας έναν ακόμα κρίκο της δημιουργικής αλληλεπίδρασης Τέχνης και Μαθηματικών.

- Η δεύτερη κατεύθυνση μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα: μετά τη μεταλαμπάδευση της Άλγεβρας των Αράβων στην Ευρώπη, αλγεβροποιήθηκε (γύρω στο 1630 μ.Χ.) η Ευκλείδεια Γεωμετρία,

πέρασε δηλαδή σε ένα άλλο (εντελώς διαφορετικό από εκείνο του Ευκλείδη) στάδιο ποιοτικής - μεθοδολογικής εξέλιξης. Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό της μετεξέλιξης αυτής είναι ότι εισήχθησαν στη Γεωμετρία αλγεβρικές μέθοδοι, οι οποίες από τη μια μεριά απλοποίησαν σε ορισμένου τύπου προβλήματα τις συλλογιστικές διαδικασίες και, από την άλλη, μας διευκόλυναν να απαλλαγούμε από την εποπτεία, από το εποπτικό σχήμα που είναι απολύτως αναγκαίο στο πλαίσιο του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, είμαστε σήμερα σε θέση να μελετήσουμε την “Ευκλείδεια Γεωμετρία” χώρων που έχουν περισσότερες από τρεις διαστάσεις.

Σημειώνουμε ακόμα, τελείως ενδεικτικά, ότι την περίοδο αυτή έφτασε σε υψηλά επίπεδα ποιότητας και πρωτοπορίας:

- η Τέχνη, με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τα έργα των Michelangelo Buonarroti (Μιχαήλ Άγγελος), El Greco (Θεοτοκόπουλου) και Rembrandt,

- η Λογοτεχνία, με τα έργα των Dante Alligieri (Δάντη), Shakespeare (Σαίξπηρ) και Molière (Μολιέρου),

- η Φιλοσοφία, π.χ., με το έργο των Descartes (Καρτέσιου) και Spinoza, στα οποία ο φιλοσοφικός στοχασμός πήρε πιο ορθολογική μορφή, αξιοποιώντας μεθόδους και διαδικασίες συμπερασμού της τότε μόνης γνωστής Γεωμετρίας, της Ευκλείδειας, και

- η Αστρονομία και η Φυσική, με αντιπροσωπευτικούς ερευνητές τους Copernicus (Κοπέρνικο), Galileo Galilei (Γαλιλαίο), Kepler και τον Newton που προαναφέραμε.

- Η τελευταία “συνολική πολιτισμική αιχμή της ανθρωπότητας” βρίσκεται σε εξέλιξη, με αφετηρία την “βιομηχανική επανάσταση” (από το 1760 μ.Χ. και μετά), δηλαδή με το πέρασμα από την (κυρίως) αγροτική οικονομία στην εποχή όπου η βιομηχανική παραγωγή (αρχικά στην Αγγλία) κυριαρχεί στη διαδικασία οικονομικής ανάπτυξης. Ο σχεδιασμός πολύπλοκων και τεχνολογικά ανεπτυγμένων μηχανών και η ταχεία διαδικασία ωρίμανσης των Μαθηματικών και της Φυσικής (συχνά σε πλήρη αλληλεξάρτηση) οδήγησαν στα σύγχρονα Μαθηματικά και τις σύγχρονες θεωρίες της Φυσικής.

Σε αυτή τη διαδικασία εξέλιξης, η Γεωμετρία μεταλλάχτηκε και πάλι, πήρε μια εντελώς καινούργια μορφή, αφηρημένη και απαλλαγμένη από έννοιες (όπως είναι, π.χ., οι συνήθεις έννοιες της ευθείας και της παραλληλίας) που την περιόριζαν και καταστάλαξε στη σύγχρονη Διαφορική Γεωμετρία, που περιέχει την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως πολύ ειδική περίπτωση. Αυτό το “πέταγμα” της Γεωμετρίας προς το αφηρημένο και τις θεωρήσεις που ξεπέρασαν την εποπτεία, αποδείχτηκε εξαιρετικά γόνιμο στη σύγχρονη Θεωρητική Φυσική: χωρίς τη Διαφορική Γεωμετρία (που κατά το χρονικό διάστημα 1905 – 1915 αναπτύχθηκε παράλληλα και σε συσχετισμό με τη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein), δεν θα μπορούσε να διατυπωθεί η θεωρία του Einstein, η οποία προσέγγισε όσο καμία άλλη μέχρι σήμερα τη δομή του σύμπαντος, ξεπερνώντας κατά μη αναμενόμενο τρόπο (με τη βοήθεια της σύγχρονης Γεωμετρίας) τους φραγμούς που μας επιβάλλει η εποπτεία. Η θεωρία αυτή είναι από τα πιο ανέλπιστα και εκπληκτικά επιτεύγματα της επιστήμης, η οποία “αφυπνίσθηκε” με τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη.

Επιλεγόμενα

Τα προηγούμενα θίγουν (και μάλιστα ενδεικτικά) ένα μικρό μόνο μέρος του φάσματος της αμφίπλευρα δημιουργικής αλληλεπίδρασης της Γεωμετρίας με το πολιτισμικό γίνεσθαι σε κάθε εποχή. Θα έχουμε, άλλωστε, την ευκαιρία (κυρίως την επόμενη χρονιά) να συζητήσουμε (αναλύοντας κάποιες λεπτομέρειες) και άλλες περιοχές του φάσματος αυτού, που θα αναφέρονται, π.χ., στη Διακοσμητική (και πρωτόγονων λαών) και τη Χαρακτική (και σε κατευθύνσεις που σχετίζονται και με Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες).

Τώρα, σε ό,τι αφορά τον ρόλο των αξιωμάτων, έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τα εξής: από τη στιγμή που μια θεωρία θα δομηθεί πάνω στα αξιώματά της, είναι αναμενόμενο η επιτυχής ή όχι επιλογή τους να καθορίζει τόσο το εύρος της θεωρίας, όσο και τις παραδοξότητες (σε σχέση με την έννοια που έχουμε για τη Γεωμετρία) που θα ισχύουν σε αυτήν. Το

επόμενο παράδειγμα μιας σύντομης αξιωματικά θεμελιωμένης θεωρίας διευκρινίζει την επισήμανση αυτή.

Στο παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο συναγωγής συμπερασμάτων, που εισήγαγαν οι Αρχαίοι Έλληνες, εφαρμόζεται συχνά στα σύγχρονα Μαθηματικά και έχει ως εξής:

Η μέθοδος της “απαγωγής σε άτοπο”: Όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε ένα συμπέρασμα ευθέως, δηλαδή ξεκινώντας από τις υποθέσεις και καταλήγοντας, με διαδοχικούς συλλογισμούς, στο ζητούμενο, τότε:

- εμπλουτίζουμε τις υποθέσεις μας με μια “υπόθεση εργασίας”, σύμφωνα με την οποία δεν ισχύει το συμπέρασμα που επιδιώκουμε, και

- θεωρώντας την άρνηση αυτή ως μια επιπλέον υπόθεση, ακολουθούμε μια σειρά συλλογισμών που οδηγεί σε ένα, προφανώς, λάθος συμπέρασμα, δηλαδή ένα συμπέρασμα που αντίκειται είτε στις υποθέσεις μας, είτε στις Προτάσεις που έχουμε ήδη αποδείξει, είτε απλώς στη λογική μας.

Τότε, λέμε ότι καταλήξαμε σε “*άτοπο*”, δηλαδή σε ένα μη αποδεκτό συμπέρασμα. Επειδή καταλήξαμε στο συμπέρασμα αυτό υποθέτοντας ότι το ζητούμενο είναι λάθος, η υπόθεσή μας αυτή δεν ισχύει, δηλαδή ισχύει το συμπέρασμα που επιδιώκαμε.

Παράδειγμα: Μια σύντομη, αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία προκύπτει από το ακόλουθο ερώτημα: *ποια ή ποιες είναι οι “Γεωμετρίες” (θεωρίες) που ικανοποιούν τα ακόλουθα τρία αξιώματα;*

Αξίωμα 1: *Κάθε “ευθεία” αποτελείται από ακριβώς δύο σημεία.*

Αξίωμα 2: *Κάθε σημείο ανήκει σε ακριβώς δύο “ευθείες”.*

Αξίωμα 3: *Κάθε “ευθεία” είναι παράλληλη (δεν έχει κοινό σημείο) με ακριβώς τρεις “ευθείες”.*

Αν και η έννοια της “ευθείας” που αναδύεται από τα “αξιώματα” αυτά δεν αντιστοιχεί στην κοινή έννοια της ευθείας, δηλαδή δεν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα, τα “αξιώματα” αυτά είναι θεωρητικά αποδεκτά με την έννοια (που προαναφέραμε) ότι δεν λένε κάτι που παραβιάζει τη λογική, ενώ

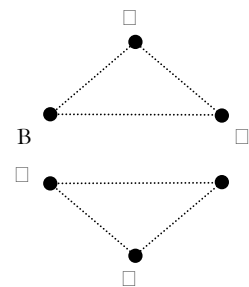
δεν είναι απαραίτητο οι μαθηματικές θεωρίες να αναφέρονται στην πραγματικότητα.

Το “αξίωμα 1” δηλώνει ότι κάθε “ευθεία” είναι ένα υποσύνολο του “επιπέδου της Γεωμετρίας” που αποτελείται από ακριβώς δυο σημεία. Το “αξίωμα 2” μας λέει ότι, αν αρχίσουμε με ένα σημείο A, θα υπάρχουν μόνο δυο σημεία, B και Γ, που θα δημιουργούν με αυτό δυο διαφορετικές “ευθείες”, τις {A,B} και {A,Γ} που υποδηλώνουμε στο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές. Στο σημείο αυτό πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Τα B και Γ ανήκουν στην ίδια “ευθεία”. Τότε, επειδή οι τρεις “ευθείες” {A,B}, {B,Γ} και {Γ,A} τέμνονται ανά δυο (δεν είναι παράλληλες), σύμφωνα με το “αξίωμα 3”, θα πρέπει να υπάρχει (τουλάχιστον) μια ακόμα “ευθεία”, έστω η {Δ,E}.

Αλλά, τόσο το Δ, όσο και το E θα πρέπει να ανήκουν σε ακριβώς δυο “ευθείες” (“αξίωμα 2”), οπότε θα υπάρχει ένα (τουλάχιστον) επιπλέον σημείο Z, που αποκλείεται να είναι ένα από τα A, B και Γ, αφού, (“απαγωγή σε άτοπο”:) αν ταυτιζόταν, π.χ., με το B, θα περνούσαν από αυτό (τουλάχιστον) τρεις “ευθείες”, που είναι “άτοπο”, αφού αντιβαίνει στο “αξίωμα 2”.

Τώρα, (και πάλι “απαγωγή σε άτοπο”:) αν τα E και Z ανήκαν σε διαφορετικές “ευθείες”, θα υπήρχαν τουλάχιστον τέσσερις παράλληλες προς καθεμιά από τις τρεις “αρχικές” “ευθείες”, που είναι “άτοπο” εξαιτίας του “αξιώματος 3”. Επομένως τα E και Z ορίζουν μια “ευθεία”. Επειδή πρέπει να ικανοποιούνται τα “αξιιώματα” 2 και 3, δεν υπάρχουν επιπλέον σημεία (γιατί;) στην περίπτωση αυτή: το σχήμα περιγράφει εποπτικά και πλήρως την μόνη δυνατή “Γεωμετρία έξη σημείων και έξη «ευθειών»” για την περίπτωση αυτή.



2η περίπτωση: Τα Β και Γ δεν ανήκουν στην ίδια “ευθεία”. Τότε θα υπάρχει ένα σημείο Δ, (όπως πριν) διαφορετικό από τα τρία αρχικά, που θα ορίζει μια “ευθεία” μαζί με το Β (όπως στο διπλανό σχήμα). Τα Δ και Γ δεν μπορούν να ορίσουν “ευθεία” για τον εξής λόγο:

(“Απαγωγή σε άτοπο”:) Αν συνέβαινε αυτό, δημιουργείται ένα σύστημα τεσσάρων “ευθειών”, στο οποίο κάθε μια “ευθεία” έχει μόνο μια παράλληλη. Θα πρέπει, λοιπόν, να υπάρχουν δυο (τουλάχιστον) επιπλέον “ευθείες” (“αξίωμα 3”), με την κάθε μια τους να έχει ως παράλληλες και τις τέσσερις “ευθείες” του προηγούμενου συστήματος, που είναι “άτοπο” (“αξίωμα 3”).

Επομένως, θα υπάρχει (τουλάχιστον) και ένα πέμπτο σημείο Ε, που θα ορίζει μαζί με το Γ μια “ευθεία”, οπότε αποδεικνύεται, με συλλογισμούς εντελώς ανάλογους με αυτούς που αφορούσαν τα σημεία Δ, Ε και Ζ στην προηγούμενη περίπτωση, ότι θα υπάρχει ακόμα ένα (τελευταίο) σημείο Ζ και ότι θα προκύψει και πάλι μια “Γεωμετρία έξη σημείων και έξη «ευθειών»”, όπως στο προηγούμενο σχήμα.

Συμπέρασμα: Σε κάθε περίπτωση, τα τρία προηγούμενα “αξιώματα” ορίζουν μια “Γεωμετρία” με ακριβώς έξη σημεία και έξη “ευθείες”. Υπάρχουν ακριβώς δύο “μοντέλα” τέτοιων “Γεωμετριών” που αποδίδονται πλήρως από τα προηγούμενα σχήματα.

Ερώτημα: Με ποια έννοια και γιατί οι δυο προκύπτουσες “Γεωμετρίες” είναι διαφορετικές;

Όπως είχαν διατυπωθεί τα “αξιώματα” ήταν εξαιρετικά περιοριστικά: “ακριβώς δυο” σημεία ή “ευθείες” στα δυο πρώτα “αξιώματα” και “ακριβώς τρεις” παράλληλες στο τρίτο. Αυτή η περιοριστική διατύπωση είχε ως συνέπεια να προκύψουν “Γεωμετρίες” με πολύ μικρές (και για τούτο πολύ περιορισμένης εμβέλειας) θεωρίες, οι οποίες έχουν περιέργες ιδιότητες: για παράδειγμα, και στις δυο περιπτώσεις δεν υπάρχει “ευθεία” που να περνάει από τα σημεία Α και Δ, σε αντίθεση με το βασικό αξίωμα του Ευκλείδη, σύμφωνα με το οποίο “κάθε δυο σημεία ορίζουν ακριβώς μια ευθεία”.

Παρ' όλα αυτά, η πλήρης ανάλυση των δυο "Γεωμετριών" που ορίζουν τα προηγούμενα τρία "αξιώματα" διευκρίνισε ενδεικτικά τον προσδιοριστικό ρόλο των αξιωμάτων γενικά, αλλά και τους κινδύνους που ελλοχεύουν αν δεν διατυπωθούν με προσοχή. Αυτή η παρατήρηση αντιστοιχεί σε μια από τις κρίσιμες αιτίες που η αξιωματικοποίηση μιας θεωρίας δεν έχει γίνει, μέχρι σήμερα, ποτέ από την αρχή, αλλά αφού οι σχετικές διερευνήσεις και αναλύσεις είχαν φτάσει σε ικανό βαθμό ωριμότητας. Αυτό συνέβη και στην περίπτωση της Γεωμετρίας του Ευκλείδη: μολονότι ο Ευκλείδης φέρεται να συνέβαλε και σε ουσιαστικές λεπτομέρειες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το μεγαλύτερο μέρος της συμβολής του έγκειται στο ότι συνέθεσε, ως ραψωδός, όσα είχαν γίνει πριν και γεφύρωσε κατά αξιοθαύμαστο τρόπο τα χάσματα μεταξύ των μεμονωμένων επιτευγμάτων, ώστε να προκύψει ένα ενιαίο και εξαιρετικό έργο.

Σήμερα ξέρουμε ότι η έννοια της "Γεωμετρίας" ορίζεται με άλλους τρόπους, που δεν ξεφεύγουν από την έννοια της "αξιωματικής θεμελίωσης", αλλά έχουν εντελώς διαφορετική υφή από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, μολονότι μπορεί να αναφέρονται σε αυτήν και να την φωτίζουν από διαφορετική οπτική γωνία σε σχέση με εκείνη του Ευκλείδη. Μια τέτοια οπτική γωνία θα συζητήσουμε την επόμενη χρονιά.

Στο πνεύμα του Ευκλείδη, γνωρίζουμε σήμερα δυο ακόμα "κλασικές" Γεωμετρίες: την *Υπερβολική* και την *Προβολική Γεωμετρία*.

Η Υπερβολική Γεωμετρία ανακαλύφθηκε πάνω από 2.000 χρόνια μετά την Ευκλείδεια και διαφέρει από αυτήν ουσιαστικά μόνο κατά το "αξίωμα των παραλλήλων": στην Υπερβολική Γεωμετρία "από σημείο εκτός ευθείας περνάνε περισσότερες από μια παράλληλες προς αυτήν".

Η Προβολική Γεωμετρία, όπως προαναφέραμε, ανακαλύφθηκε έμμεσα από τους ζωγράφους μεταξύ 1200 και 1600 μ.Χ. και κατοχυρώθηκε μαθηματικά γύρω στο 1850 μ.Χ. Η Γεωμετρία αυτή διαφέρει από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ανάμεσα στα άλλα, κατά το ότι σε αυτήν δεν υπάρχουν παράλληλες: στην Προβολική Γεωμετρία κάθε δυο ευθείες τέμνονται.

Είναι προφανές ότι υπάρχουν Προτάσεις που ισχύουν σε μια από τις τρεις αυτές Γεωμετρίες (την Ευκλείδεια, την Υπερβολική και την Προβολική) και είναι λανθασμένες για τις άλλες δυο. Δεν είναι, λοιπόν, σωστό αυτό που λέγεται συνήθως, ότι δηλαδή “στα Μαθηματικά μια Πρόταση είναι είτε σωστή, είτε λάθος”. Το σωστό είναι ότι *αυτό ισχύει* (αν και όχι απολύτως) *σε κάθε μια αξιωματικά θεμελιωμένη μαθηματική θεωρία*, ενώ μπορεί να υπάρχουν εξίσου αποδεκτές στα Μαθηματικά θεωρίες (όπως οι τρεις προηγούμενες Γεωμετρίες) με αντιφατικές μεταξύ τους “μαθηματικές αλήθειες”.

Είναι αξιοσημείωτο ότι και οι τρεις προηγούμενες “κλασικές Γεωμετρίες” μπορεί να έχουν διαφορές μεταξύ τους, αλλά είναι και οι τρεις κάπου χρήσιμες: η Υπερβολική Γεωμετρία φαίνεται να είναι πιο κοντά από την Ευκλείδεια προς “τη Γεωμετρία του χώρου”, σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, η Ευκλείδεια Γεωμετρία προσεγγίζει τοπικά τη “Γεωμετρία του χώρου” και, καθώς επιτρέπει ευκολότερους και αποτελεσματικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιείται στην επιστήμη της Στατικής των Κατασκευών, ενώ η Προβολική Γεωμετρία αποδίδει τη “Γεωμετρία του καμβά” στη Ζωγραφική με Προοπτική.

Κλείνοντας μπορούμε να πούμε ότι:

- Η Γεωμετρία του Ευκλείδη υπήρξε η πρώτη αξιωματικά θεμελιωμένη και συλλογιστικά δομημένη επιστήμη με τη σύγχρονη έννοια του όρου.

- Η αναγωγή ενός γνωστικού αντικείμενου μιας θεωρίας, στις “πρωταρχικές αλήθειες” της, τα “αξιώματα”, που παράγουν ολόκληρη τη θεωρία και, κατά συνέπεια, την ελέγχουν, επέτρεψε τη σαφή διάκριση θεωριών μεταξύ τους, ακόμα και μέσα στην ίδια επιστήμη, όπως είναι, π.χ., οι θεωρίες της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και της Προβολικής Γεωμετρίας, που εντάσσονται στα Μαθηματικά και, ειδικότερα, στη Γεωμετρία και έχουν η κάθε μια τις δικές της, μαθηματικά εξίσου νομιμοποιημένες, “αλήθειες” που δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Αυτό έδωσε ένα καινούργιο νόημα στην έννοια της “επιστημονικής αλήθειας”, ακόμα και της “μαθηματικής αλήθειας”, η οποία εθεωρείτο πριν ακλόνητη (όπως εξακολουθεί να είναι) και μοναδική.

- Όπως ήταν φυσικό, αυτή η σαφήνεια στην οριοθέτηση του πλαισίου μιας θεωρίας και, κατ' επέκταση, των βασικών της στόχων, οδήγησε στο να δομηθούν σιγά - σιγά και οι άλλες επιστήμες στη βάση των δικών τους αξιωμάτων. Ειδικότερα η Θεωρητική Φυσική, η σύγχρονη θεωρία του σύμπαντος, ακολούθησε (περίπου 2.000 χρόνια μετά) το παράδειγμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αξιωματικοποιήθηκε. Μετά από αυτό ήταν βέβαιο ότι θα ακολουθούσε η “μαθηματικοποίηση” της Φυσικής, δηλαδή ο εμπλουτισμός της δομής της ως θεωρίας και των μεθόδων της με έννοιες και αποτελεσματικές μεθόδους των μαθηματικών θεωριών, οι οποίες είτε προϋπήρχαν και ήταν πρόσφορες για εφαρμογές στη Φυσική, είτε δημιουργήθηκαν, μέχρι ένα βαθμό, παράλληλα με τις θεωρίες της Φυσικής, στην ανάπτυξη των οποίων συνέβαλλαν.

Όπως είπαμε, το κορυφαίο παράδειγμα στην τελευταία κατεύθυνση είναι η παράλληλη ανάπτυξη μέρους της σύγχρονης “Διαφορικής Γεωμετρίας” και της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein, την περίοδο 1905 – 1915, που οδήγησε στις σύγχρονες θεωρίες για το σύμπαν και, ειδικότερα, για την ύπαρξη και τη λειτουργία των “μαύρων τρυπών”, τις οποίες συνέλαβε πρώτα η ανθρώπινη σκέψη και τείνει, στη συνέχεια, να επιβεβαιώσει το πείραμα στην εποχή μας. Θα έχουμε την ευκαιρία (την επόμενη χρονιά) να συζητήσουμε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας σε μια πολύ ειδική εκδοχή της, που είναι πρόσφορη για διδασκαλία στο Λύκειο και αποτελεί ένα εύγλωττο παράδειγμα, το οποίο διευκρινίζει, έστω και δειγματοληπτικά, τι εννοούμε λέγοντας ότι “τα Μαθηματικά μας βοηθούν να ξεπεράσουμε τους, συχνά παραμορφωτικούς, φραγμούς της εποπτείας”.

Προς το παρόν, ως εισαγωγή στον “Ευκλείδειο τρόπο σκέψης”, θα αναλύσουμε ένα μέρος από το έργο του Αρχιμήδη “Περί επιπέδων ισορροπιών” για να δούμε πώς έφτασε ο μέγιστος αυτός μαθηματικός στο “νόμο ισορροπίας των μοχλών”, αναπτύσσοντας συλλογιστικά μια σύντομη θεωρία στη βάση “αξιωμάτων” που αφορούν κέντρα βάρους και ισορροπία μοχλών.

