Ο ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ ΚΑΙ Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Διαβάζουμε από το βιβλίο «Liber Abaci» κεφάλαιο 5ο «Για την διαίρεση των ακεραίων» , ανάμεσα σε άλλα, και τα παρακάτω:

- « Όταν κανείς επιθυμεί να ξέρει να διαιρεί οποιονδήποτε αριθμό με οποιονδήποτε άλλον, είναι απαραίτητο, όπως και στην πρόσθεση, πρώτα να διαιρεί όλους τους αριθμούς με τους αριθμούς από το 2 έως το 10. Και αυτό δεν είναι δυνατόν να γίνει πριν εισαχθεί σε διαιρέσεις κυρίων αριθμών που θα ξέρει απ' έξω. Αυτές οι διαιρέσεις δίνονται σε πίνακες στις επόμενες σελίδες. Αλλά το πρώτο που πρέπει να διδαχθεί είναι πως τα μικρά κλάσματα γράφονται.
Αν πάνω από ένα νούμερο βάλλουμε μια κλασματική γραμμή και πάνω από αυτήν ένα άλλο νούμερο, το πάνω νούμερο σημαίνει τον αριθμό των μερών που καθορίζονται από το κάτω νούμερο. Το κάτω νούμερο ονομάζεται denominator και το πάνω ονομάζεται numerator. [Σ.τ.μ. οι ονομασίες αυτές (στα λατινικά) δόθηκαν από τον Φιμπονάτσι]. Και αν πάνω από τον αριθμό 2 γραφτεί ο αριθμός 1, αυτό σημαίνει το ένα από τα δύο μέρη του όλου, δηλαδή το μισό, (ομοίως 1/3, 1/4….1/19 σημαίνει το δεκαενακοστό μέρος του όλου). Αν πάνω από το 3 βάλλουμε το 2 σημαίνει τα δύο από τα τρία μέρη του όλου (και άλλα τέτοια παραδείγματα).

- Παρακάτω περιγράφει τα composed κλάσματα:
Αναφέρουμε ένα παράδειγμα τέτοιου κλάσματος (διαβάζουμε από δεξιά προς τα αριστερά):

$\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$ (με συνεχόμενη όμως γραμμή). Αυτό σημαίνει:

$$\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10} = \frac{7}{10} + \frac{5}{6\cdot 10} + \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10}$$

Έχει ενδιαφέρον το <u>σχετικό σχόλιο του μεταφραστή</u>:
« Αυτά τα composed κλάσματα, τα οποία έχουν Αραβική καταγωγή, χρησιμοποιούνται συστηματικά από τον Φιμπονάτσι και χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής που υποδεικνύει την ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων αριθμών (ή άλλων χρήσιμων παραγόντων). Αυτού του είδους τα κλάσματα δεν χρησιμοποιούνται σήμερα.
Τα δεκαδικά κλάσματα είναι μια ειδική περίπτωση τέτοιων κλασμάτων. Για παράδειγμα: 3,1416 = $\frac{6}{10}\frac{1}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10}3$. Συνεπώς κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τα δεκαδικά κλάσματα ή τουλάχιστον ήταν κοντά σε αυτό. <u>Γιατί δεν χρησιμοποίησε περισσότερο τα δεκαδικά κλάσματα</u>; Απλά γιατί οι κλασματικές μονάδες μέτρησης σπάνια χρησιμοποιούνταν στον κόσμο που ζούσε. Για παράδειγμα το νόμισμα της Πίζας δεν είχε δεκαδικές υποδιαιρέσεις. 2 pounds , 7 soldi, 3 denari γράφονταν $\frac{3}{12}\frac{7}{20}2$ pounds. Ωστόσο όταν τα δεκαδικά κλάσματα ήταν απαραίτητα, τα χρησιμοποιούσε. (Αναφέρει 2 συγκεκριμένα παραδείγματα από το βιβλίο). Με βάση αυτά τα παραδείγματα είναι δύσκολο να αρνηθούμε ότι ο Φιμπονάτσι χρησιμοποίησε δεκαδικά κλάσματα. Ο συμβολισμός των composed

κλασμάτων, κατά συνέπεια καλύπτει μεγάλη γενικότητα που ο Φιμπονάτσι χρησιμοποίησε για να αντιμετωπίσει τα διαφορετικά ήδη μέτρησης.

- Στην συνέχεια ο Φιμπονάτσι προτείνει να μάθουμε απ' έξω τους παρακάτω πίνακες:

[TABLE OF DIVISION]

	of	*is*	*remains*
$\frac{1}{2}$	1	0	1
$\frac{1}{2}$	2	1	
$\frac{1}{2}$	3	1	1
$\frac{1}{2}$	4	2	
$\frac{1}{2}$	5	2	1
$\frac{1}{2}$	6	3	
$\frac{1}{2}$	7	3	1
$\frac{1}{2}$	8	4	
$\frac{1}{2}$	9	4	1
$\frac{1}{2}$	10	5	
$\frac{1}{2}$	11	5	1
$\frac{1}{2}$	12	6	
$\frac{1}{2}$	13	6	1
$\frac{1}{2}$	14	7	
$\frac{1}{2}$	15	7	1
$\frac{1}{2}$	16	8	
$\frac{1}{2}$	17	8	1
$\frac{1}{2}$	18	9	
$\frac{1}{2}$	19	9	1
$\frac{1}{2}$	20	10	

$\frac{1}{3}$	1	0	1
$\frac{1}{3}$	2	0	2
$\frac{1}{3}$	3	1	
$\frac{1}{3}$	4	1	1
$\frac{1}{3}$	5	1	2
$\frac{1}{3}$	6	2	
$\frac{1}{3}$	7	2	1
$\frac{1}{3}$	8	2	2
$\frac{1}{3}$	9	3	
$\frac{1}{3}$	10	3	1
$\frac{1}{3}$	11	3	2
$\frac{1}{3}$	12	4	
$\frac{1}{3}$	13	4	1
$\frac{1}{3}$	14	4	2
$\frac{1}{3}$	15	5	
$\frac{1}{3}$	16	5	1
$\frac{1}{3}$	17	5	2
$\frac{1}{3}$	18	6	
$\frac{1}{3}$	19	6	1
$\frac{1}{3}$	20	6	2
$\frac{1}{3}$	21	7	
$\frac{1}{3}$	22	7	1
$\frac{1}{3}$	23	7	2
$\frac{1}{3}$	24	8	
$\frac{1}{3}$	25	8	1
$\frac{1}{3}$	26	8	2

$\frac{1}{3}$	1	0	1
$\frac{1}{3}$	2	0	2
$\frac{1}{3}$	3	1	
$\frac{1}{3}$	4	1	1
$\frac{1}{3}$	5	1	2
$\frac{1}{3}$	6	2	
$\frac{1}{3}$	7	2	1
$\frac{1}{3}$	8	2	2
$\frac{1}{3}$	9	3	
$\frac{1}{3}$	10	3	1
$\frac{1}{3}$	11	3	2
$\frac{1}{3}$	12	4	
$\frac{1}{3}$	13	4	1
$\frac{1}{3}$	14	4	2
$\frac{1}{3}$	15	5	
$\frac{1}{3}$	16	5	1
$\frac{1}{3}$	17	5	2
$\frac{1}{3}$	18	6	
$\frac{1}{3}$	19	6	1
$\frac{1}{3}$	20	6	2
$\frac{1}{3}$	21	7	
$\frac{1}{3}$	22	7	1
$\frac{1}{3}$	23	7	2
$\frac{1}{3}$	24	8	
$\frac{1}{3}$	25	8	1
$\frac{1}{3}$	26	8	2

$\frac{1}{5}$	5	1	$\frac{1}{6}$	6	1.	$\frac{1}{7}$	7	1	$\frac{1}{8}$	8	1	$\frac{1}{9}$	9	1
$\frac{1}{5}$	10	2	$\frac{1}{6}$	12	2	$\frac{1}{7}$	14	2	$\frac{1}{8}$	16	2	$\frac{1}{9}$	18	2
$\frac{1}{5}$	15	3	$\frac{1}{6}$	18	3	$\frac{1}{7}$	21	3	$\frac{1}{8}$	24	3	$\frac{1}{9}$	27	3
$\frac{1}{5}$	20	4	$\frac{1}{6}$	24	4	$\frac{1}{7}$	28	4	$\frac{1}{8}$	32	4	$\frac{1}{9}$	36	4
$\frac{1}{5}$	25	5	$\frac{1}{6}$	30	5	$\frac{1}{7}$	35	5	$\frac{1}{8}$	40	5	$\frac{1}{9}$	45	5
$\frac{1}{5}$	30	6	$\frac{1}{6}$	36	6	$\frac{1}{7}$	42	6	$\frac{1}{8}$	48	6	$\frac{1}{9}$	54	6
$\frac{1}{5}$	35	7	$\frac{1}{6}$	42	7	$\frac{1}{7}$	49	7	$\frac{1}{8}$	56	7	$\frac{1}{9}$	63	7
$\frac{1}{5}$	40	8	$\frac{1}{6}$	48	8	$\frac{1}{7}$	56	8	$\frac{1}{8}$	64	8	$\frac{1}{9}$	72	8
$\frac{1}{5}$	45	9	$\frac{1}{6}$	54	9	$\frac{1}{7}$	63	9	$\frac{1}{8}$	72	9	$\frac{1}{9}$	81	9
$\frac{1}{5}$	50	10	$\frac{1}{6}$	60	10	$\frac{1}{7}$	70	10	$\frac{1}{8}$	80	10	$\frac{1}{9}$	90	10

$\frac{1}{5}$	5	1	$\frac{1}{6}$	6	1.	$\frac{1}{7}$	7	1	$\frac{1}{8}$	8	1	$\frac{1}{9}$	9	1
$\frac{1}{5}$	10	2	$\frac{1}{6}$	12	2	$\frac{1}{7}$	14	2	$\frac{1}{8}$	16	2	$\frac{1}{9}$	18	2
$\frac{1}{5}$	15	3	$\frac{1}{6}$	18	3	$\frac{1}{7}$	21	3	$\frac{1}{8}$	24	3	$\frac{1}{9}$	27	3
$\frac{1}{5}$	20	4	$\frac{1}{6}$	24	4	$\frac{1}{7}$	28	4	$\frac{1}{8}$	32	4	$\frac{1}{9}$	36	4
$\frac{1}{5}$	25	5	$\frac{1}{6}$	30	5	$\frac{1}{7}$	35	5	$\frac{1}{8}$	40	5	$\frac{1}{9}$	45	5
$\frac{1}{5}$	30	6	$\frac{1}{6}$	36	6	$\frac{1}{7}$	42	6	$\frac{1}{8}$	48	6	$\frac{1}{9}$	54	6
$\frac{1}{5}$	35	7	$\frac{1}{6}$	42	7	$\frac{1}{7}$	49	7	$\frac{1}{8}$	56	7	$\frac{1}{9}$	63	7
$\frac{1}{5}$	40	8	$\frac{1}{6}$	48	8	$\frac{1}{7}$	56	8	$\frac{1}{8}$	64	8	$\frac{1}{9}$	72	8
$\frac{1}{5}$	45	9	$\frac{1}{6}$	54	9	$\frac{1}{7}$	63	9	$\frac{1}{8}$	72	9	$\frac{1}{9}$	81	9
$\frac{1}{5}$	50	10	$\frac{1}{6}$	60	10	$\frac{1}{7}$	70	10	$\frac{1}{8}$	80	10	$\frac{1}{9}$	90	10

«Ένας καθολικός κανόνας για την διαίρεση αριθμών από αριθμούς με ένα ψηφίο»

Παράδειγμα: 365:2

Αν θέλει κανείς να διαιρέσει το 365 με το 2 γράφει στον πίνακα το 2

2
1
365
2
1

10
365
18

101
365
182

Division
Quotient
$\frac{1}{2}$182

σε ένα μέρος του πίνακα και τραβάς μια γραμμή από πάνω και ένα άλλο 2 κάτω από το 5 και ξεκινάς διαιρώντας το 3 με το 2, λέγοντας το 1/2 του 3 είναι 1 και περισσεύει 1. Μετά γράφεις το 1 κάτω από το 3 και το 1 που περισσεύει το γράφεις από πάνω, όπως φαίνεται στον πρώτη εικόνα. Και το υπόλοιπο 1 ζευγαρώνει με το 6 κάνοντας 16. Παίρνεις το 1/2 του 16 που είναι το 8. Βάζεις το 8 κάτω από το 6 και το 1 κάτω από το 3 όπως φαίνεται στην δεύτερη εικόνα. Και καθώς δεν υπάρχει υπόλοιπο στην διαίρεση με του 16, διαιρείς το 5 με το 2. Το πηλίκο είναι 2 και το υπόλοιπο 1. Γράφεις το 2 κάτω από το 5 και το 1 πάνω από το 2 το οποίο θα κάνουμε παρανομαστή και έτσι θα έχουμε το 1/2 του όλου και πριν από το 1/2 γράφεις το πηλίκο 182 της διαίρεσης όπως φαίνεται στην τρίτη εικόνα. (Κάνει και την επαλήθευση με πολλαπλασιασμό του 182 1/2 επί 2).

Όμοια για να <u>διαιρέσεις το 365 με το 3</u>:
Γράφεις το 3 (διαιρέτης) κάτω από το 5 (του 365) και διαιρείς το 3 (του 365) με το 3 (διαιρέτης). Το πηλίκο είναι 1 το οποίο το βάζεις κάτω από το 3 (του 365). Επίσης διαιρείς το 3 (διαιρέτης) με το 6 (του 365). Το πηλίκο είναι 2 το οποίο το βάζεις κάτω από το 6. Μετά διαιρείς το 5 με το 3. Το πηλίκο είναι 1 και το υπόλοιπο 2. Βάζεις το 1 (πηλίκο) κάτω από το 5 και το (υπόλοιπο) 2 αριθμητή σε κλάσμα με παρανομαστή το 3. Έτσι το πηλίκο είναι 121 2/3.

<u>Διαίρεση του 1346 με το 4</u>:

1	2	2
1346	1346	1346
4	14	26
3	**3**	**6**

διαιρείς το 13 με το 4, βάζεις το πηλίκο 3 κάτω από το 3 και το υπόλοιπο 1 κάτω από το 3. Ζευγαρώνεις το 1 με το 4 και παίρνεις το 14. Προσθέτεις τα τέταρτα του 14 που είναι 3 και περισσεύουν 2. Βάζεις το 3 κάτω από το 4 και το υπόλοιπο 2 από πάνω. Το 2 ζευγαρώνει με το 6 και κάνει 26. Το 26 διαιρείται με το 4 και δίνει πηλίκο 6 και υπόλοιπο 2. Βάζεις το 6 κάτω από το 6 και φτιάχνεις το κλάσμα 2/4 που είναι ίσο με το 1/2 του όλου. Και μετά από αυτό βάζεις το πηλίκο της διαίρεσης που είναι το 336. Συνολικά το πηλίκο είναι 336 1/2.
Συνεπώς ξέραμε πως έχουμε 13 εκατοντάδες καθώς η τρίτη θέση είναι εκατοντάδες

<u>Η διαίρεση του 5439 από το 5</u>

<u>Η διαίρεση του 9000 από το 7</u>

<u>Η διαίρεση του 10000 από το 8</u>

<u>Η διαίρεση του 120037 από το 9</u>

<u>Η διαίρεση των αριθμών από το 11</u>

Η διαίρεση του 123586 από το 13

Αν θέλεις να διαιρέσεις το 123586 με το 13, τότε το 13 μπαίνει κάτω από το 86, διαιρείς το 123 με το 13 γιατί το 12 είναι μικρότερο από το 13. Το πηλίκο θα είναι 9 και το υπόλοιπο 6.

6	**0**	8
123586	123586	123586
13	65	86
9	**5**	**6**

123586 : 13 = 9506 8/13

Και 9 φορές το 13 κάνει 117 και το υπόλοιπο από το 123 είναι 6. Βάζεις το 9 κάτω από το 3 του 123 και το υπόλοιπο 6 το βάζεις πάνω από το 3 και το ζευγαρώνεις με το 5. Αυτό κάνει 65 του οποίου το 1/13 είναι 5. Έτσι βάζεις το 5 κάτω από το 5 και πάνω από το 8 βάζεις 0 γιατί το 8 είναι μικρότερο από το 13 και ζευγαρώνεις το 8 με το 6 που είναι στην πρώτη θέση. Θα γίνει 86 του οποίου το 1/13 είναι 6 και αφήνει υπόλοιπο 8. Βάζεις το 6 στην πρώτη θέση του πηλίκου και το 8 πάνω από την γραμμή κλάσματος του 13.

Πως διαιρώ με το 10:

Π.χ. 167: 10 = 16 7/10 ή 1673: 10 = 167 3/10

Εδώ ξεκινάει οι διαίρεση των αριθμών από Incomposite (όχι σύνθετοι) (or primes) (πρώτους) αριθμούς με δύο θέσεις.

Κάποιοι αριθμοί δεν είναι σύνθετοι και είναι εκείνοι που στην Αριθμητική και στην Γεωμετρία καλούνται πρώτοι. **Αυτό οφείλεται** στο ότι δεν υπάρχει μικρότεροι αριθμοί, εκτός από την μονάδα, που να μετρούν τον αριθμό (να είναι παράγοντες του αριθμού). Οι **άραβες** τους ονομάζουν **hasam**. Οι **έλληνες** τους ονομάζουν **linear** (γραμμικοί) ενώ τους σύνθετους **epipedi** (επίπεδους) που είναι εμβαδά όπως ονομάζονταν από τον πιο ικανό γεωμέτρη, τον Ευκλείδη. [Σ.τ.μ: π.χ το 65 οι Έλληνες το αντιλαμβάνονταν ως το εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές 5 και 13]
Τους σύνθετους τους ονομάζουμε κανονικούς αριθμούς και τους πρώτους μη κανονικούς. Η διδασκαλία της διαίρεσης για τους πρώτους και τους σύνθετους **δεν είναι η ίδια**.

Γενική περιγραφή (με λόγια) της διαίρεσης αριθμού με πρώτο.

Περιγραφή διαιρέσεων με το 17, το 19 και το 23 και μετά επαληθεύσεις των παραπάνω διαιρέσεων. Ακολουθεί διαίρεση με το 59.

<u>Πως διαιρεί με σύνθετους αριθμούς (σελ. 70)</u>

Για παράδειγμα θα κάνουμε την διαίρεση 749: 75 :
Πρώτα παρατηρείς τον κανόνα για να βρίσκεις στους αριθμούς παράγοντα το 5 και βρίσκεις τον κανόνα για το 75 που είναι $\frac{1}{3}\frac{0}{5}\frac{0}{5}$ [που είναι μια άλλη γραφή του $\frac{1}{75}$]
Διαιρείς το 749 με το 3 που δίνει πηλίκο 249 και υπόλοιπο 2 το οποίο βάζεις πάνω από το 3 στο κλάσμα και διαιρείς το 249 με το 5 δηλαδή από αυτό που προηγείται του 3 στο κλάσμα. Το πηλίκο είναι 49 και αφήνει υπόλοιπο 4. Αυτό το 4 το βάζεις πάνω από το 5 και διαιρείς πάλι το 49 με το 5 αυτό που είναι στο τέλος του κλάσματος. Το πηλίκο είναι 9 και το υπόλοιπο 4. Το 4 το βάζεις πάνω από το 5 και το 9 το βάζεις πριν από το κλάσμα. Και έτσι το πηλίκο της διαίρεσης 749:75 είναι $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{4}{5}9$

[δηλαδή: $9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{2}{75}$]

<u>Σελίδα 78</u>: Από το κεφάλαιο 6

<u>Πολλαπλασιασμός 11 1/2 · 22 1/3</u>

[Κάνει τους μικτούς κλάσματα και πολλαπλασιάζει τους αριθμητές και τους παρανομαστές. Τέλος διαιρεί τον αριθμητή με τον παρανομαστή και βρίσκει: 256 5/6]

ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΑΔΑ
ΘΑΛΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΙ
ΝΑΟΥΣΑ 2010
ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΧΜΕΣ
Σωτήρης Συριόπουλος