Ανδρέας Ιωάννου Κασσέτας

ο χρυσός φ

Στην άκρη του νήματος βρίσκονται πέντε ερωτήματα καθένα από τα οποία περιμένει την απάντησή του

1. Υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε εάν τον υψώσεις στο τετράγωνο να αυξηθεί κατά μία μονάδα; Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;
2. Υπάρχει αριθμός τέτοιος ώστε εάν τον ελαττώσεις κατά μία μονάδα να αντιστραφεί;
Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;
3. Χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο κομμάτια. Στη γλώσσα της ελληνικής Γεωμετρίας λέμε ότι κάνουμε μια ΤΟΜΗ η οποία είναι ΧΡΥΣΗ εφόσον ο λόγος του μεγάλου προς το μικρό είναι ίσος με το λόγο ολόκληρου προς το μεγάλο. Ποια είναι η τιμή αυτού του λόγου;
4. Το κανονικό δεκάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η ακτίνα του κύκλου είναι βέβαια μεγαλύτερη από την πλευρά του. Πόσες φορές;
5. Η ακολουθία **Fibonacci** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025 . . Καθένας από τους όρους της προκύπτει από το άθροισμα των δύο που προηγούνται. $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}$.
Αν φτιάξουμε μια ακολουθία με όρους τους λόγους των διαδοχικών όρων της ακολουθίας θα έχουμε

$$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{24},\frac{89}{55},\frac{144}{89},\frac{223}{144},\frac{377}{233},\frac{610}{377},\ldots$$

Θα διαπιστώσουμε ότι «συγκλίνει» σε κάποιο αριθμό. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

«Εκείνος» δοκίμασε ε να δώσει απαντήσεις στα τέσσερα από τα ερωτήματα. Όσο για το πέμπτο περίμενε τη δεκαετία του 1970 να ανακαλυφθεί το κομπιουτεράκι και τότε το «είδε» κάνοντας πράξεις.

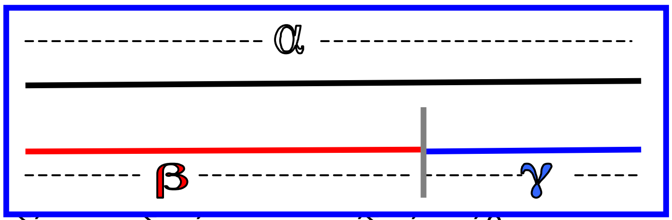
Δοκίμασε το **πρώτο** . Υπέθεσε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο x

$x^2 = x + 1$ $\quad x^2 - x - 1 = 0$ $\quad \underline{x = (1+\sqrt{5})/2}$

Δοκίμασε το **δεύτερο** . Υπέθεσε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο y

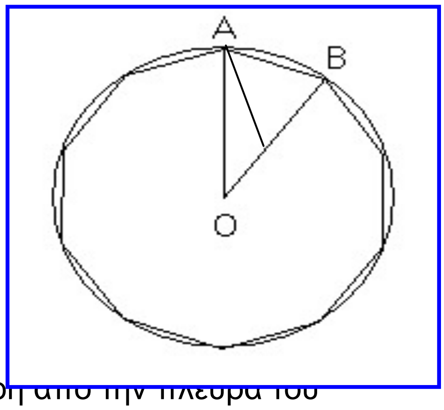
$y - 1 = 1/y$ $\quad \underline{y = (1+\sqrt{5})/2}$

Δοκίμασε το **τρίτο**. Υπέθεσε ότι ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με τον αριθμό z



z = α/β = β/γ ή α/β = β/(α-β)
ή α(α-β) = $β^2$ ή $α^2 – αβ –β^2 = 0$ ή
ή $α^2 – αβ –β^2 = 0$ $(α/β)^2-(α/β) –1 = 0$
$z^2–z-1 = 0$ <u>z = **(1+√**5**)** /2</u>

Δοκίμασε να απαντήσει στο **τέταρτο**. Σχεδίασε το δεκάγωνο και είδε ότι κάθε ισοσκελές τρίγωνο που
δημιουργείται με μία πλευρά (L) του δεκαγώνου
και δύο ακτίνες (R) στα άκρα της είναι ισοσκελές
με γωνία κορυφής 36^0., οπότε οι δύο άλλες
γωνίες του είναι 72^0. Φέρνοντας τη διχοτόμο
της ΟΑΒ είδε η γωνία ΟΑΔ θα είναι 36^0 και
η ΟΔΒ = 72^0 άρα τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΔΑΒ θα
είναι όμοια και ισχύει <u>ΟΑ/ΑΒ = ΑΔ/ΔΒ</u> .



Αλλά ΟΑ =R ΟΔ=ΑΔ=ΑΒ=L και ΔΒ= R-L , οπότε
<u>R/ L = L/ R-L</u> R^2- RL- L^2 = 0 R = L<u>**(1+√**5**)** /2</u>
Η ακτίνα του κύκλου είναι (**1+√**5**)** /2 φορές μεγαλύτερη από την πλευρά του κανονικού δεκαγώνου

Το **πέμπτο** το αντιμετώπισε με ένα **κομπιουτεράκι. Υπολόγισε με** το κομπιουτεράκι, τις τιμές αυτών των λόγων, σε δεκαδικούς
και είδε ότι 2/1 = 2 3/2 = 1,5000000 5/3 = 1,666666
8/5 = 1,6000000 13/8 = 1,6250000 21/13 = 1,6153846
34/21 = 1,6190476 55/34 = 1,617647 89/55 = 1,6181818
144/89 = 1,6179775 233/144 = 1,6180555 377/233 =1,6180257
610/ 377 = 1,6180371 987/610 = 1,6180327 1597/987=1,6810344
2584/1597=1,6180338 4181/2584 = 1,6180340 <u>6765/4181 = 1,6180339</u>
10946/6765 = 1,6180339 17711/10946 = 1,6180339 28657/17711 = 1,6180339 46368/28657 = 1,6180339
Διαπίστωσε ότι από τον λόγο 6765/4181 και μετά, το κομπιουτεράκι έφθανε στα φθάνει στα όρια του, στα δέκα δηλαδή ψηφία από τα οποία τα εννέα είναι δεκαδικά. Οι λόγοι που ακολουθούν δεν είναι μεταξύ τους ίσοι αλλά το κομπιουτεράκι αδυνατεί να το δείξει.
Του έδειχνε συνεχώς έναν αριθμό ο οποίος συμπίπτει σε εννέα δεκαδικά ψηφία με τον αριθμό φ.
Και είναι γεγονός ότι το όριο της ακολουθίας που είχε δημιουργήσει ήταν ο φ.

Το **γενικό συμπέρασμα**. Και στις τρεις περιπτώσεις ο ζητούμενος αριθμός
είναι ίσος με **(1+√5) /2** ή με επτά δεκαδικά ψηφία ίσος με

1, 6180339. . .

ο αριθμός αυτός διεθνώς συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα

φ

Είναι ο λεγόμενος ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ή ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ.

Ο Leonardo da Vinci μας έμαθε ότι εάν το ύψος οποιουδήποτε ανθρώπου διαιρεθεί με το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο αφαλός του το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με φ.
1700 χρόνια νωρίτερα είχε ασχοληθεί μαζί του ο Ευκλείδης αλλά τα βιβλία που αναφέρονται σε αυτόν δεν είναι κυρίως βιβλία μαθηματικών. Είναι βιβλία διαπνεόμενα από μυστικισμό και μας μιλούν για το σουξέ που είχε ο φ διατηρούμενος σαν λείψανο από τους αρχαίος μύστες, μας λένε πως ο φ είναι ένα μυστικό της ομορφιάς το οποίο διατηρήθηκε και πως δεν είναι τυχαίο ότι η πρόσοψη του Παρθενώνα εγγράφεται σε ένα χρυσό ορθογώνιο με πλευρές που έχουν λόγο φ.
Στην ευρωπαϊκή παράδοση ο όρος «χρυσή τομή» κάνει την εμφάνισή του στο έργο του Leorardo da Vinci σε γλώσσα λατινική ως sectio aurea.
Η χρυσή του συμβόλου «φ» εμφανίζεται πολύ αργότερα ύστερα από πρόταση του αμερικανού μαθηματικού Mark Barr. Το πρότεινε ως αρχικό του ονόματος του γλύπτη Φειδία ο οποίος χρησιμοποίησε τη χρυσή τομή στα σχέδια των έργων του.

ο **φ** και η **Άλγεβρα**.

Ο φ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Ισχύει συνεπώς $\varphi^2 = 1+\varphi$ και $\varphi = \sqrt{(1+\varphi)}$

.

Η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την οικοδόμηση ενός άλλου ορισμού του φ.

$$\varphi = \sqrt{\{1+\sqrt{(1+\varphi)}\}} \qquad \text{ή } \varphi = \sqrt{\{1+\sqrt{(1+\sqrt{1+\varphi}\,)}\}}$$

Αυτό μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον $\boxed{\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}$

Για τον φ ισχύει επίσης: $\varphi=1+1/\varphi$ $\quad \varphi=1+1/(1+1/\varphi)$

$$\boxed{\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Για τον φ ισχύει ακόμα:

$\varphi = \varphi$, $\quad \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi^3 = 2\varphi + 1$,

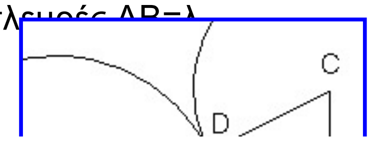
$\varphi^4 = 3\varphi + 2 \quad \varphi^5 = 5\varphi + 3, \quad \varphi^6 = 8\varphi + 5, \ldots$

ο **φ** και η **Γεωμετρία**

Με κανόνα και διαβήτη

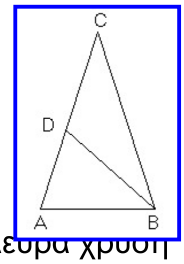
Η χρυσή τομή ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ μήκους λ μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη.

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ΑΒ=λ



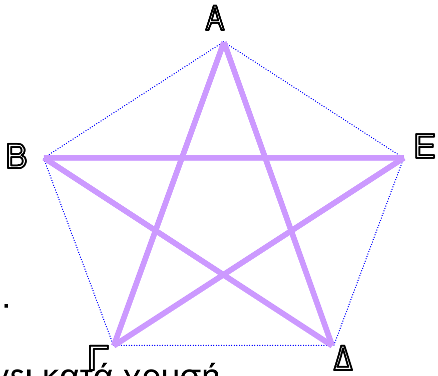
και BC = λ/2, οπότε η υποτείνουσα AC θα είναι $\sqrt{5}\lambda/2$.
Με το διαβήτη χαράσσουμε έναν κύκλο κέντρου C και ακτίνας λ/2, οπότε προσδιορίζεται το σημείο D, σημείο τομής του κύκλου και της AC. Με κέντρο το A χαράσσουμε έναν κύκλο ακτίνας AD, ο οποίος τέμνει την AB στο σημείο S. Εύκολα αποδεικνύεται ότι AB/AS = $\sqrt{5}+1$ ότι το S δηλαδή τέμνει την AB με χρυσή τομή.

Χρυσό τρίγωνο



Χρυσό λέγεται κάθε ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο ο λόγος της μεγάλης πλευράς προς τη μικρή θα είναι ίσος με φ. Κάθε ισοσκελές με γωνία κορυφής 36^0 είναι *χρυσό*. Μπορούμε να το αποδείξουμε φέρνοντας τη διχοτόμο μιας από τις παρά τη βάση γωνίες – στο σχήμα της B – τα τρίγωνα ABC και ABD είναι όμοια, οπότε (AC) = φ(AB)
Η διχοτόμος της γωνίας B = 72^0 δημιουργεί στην απέναντι πλευρά χρυσή τομή

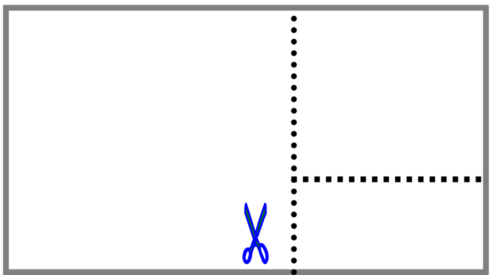
Το αστέρι των Πυθαγορείων



Το σύμβολο της αδελφότητας των Πυθαγορείων ήταν το «πεντάγραμμο», το αστέρι δηλαδή που σχηματίζεται από τις πέντε διαγωνίους του κανονικού πενταγώνου. Αποδεικνύεται ότι κάθε πλευρά του «πενταγράμμου» διαιρεί τις δύο άλλες σε χρυσή τομή. Κάθε γωνία του «πενταγράμμου» είναι 36^0. Στο τρίγωνο ΑΓΔ του σχήματος η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία ΑΓΔ άρα τέμνει κατά χρυσή τομή την ΔΓ.

Χρυσό ορθογώνιο

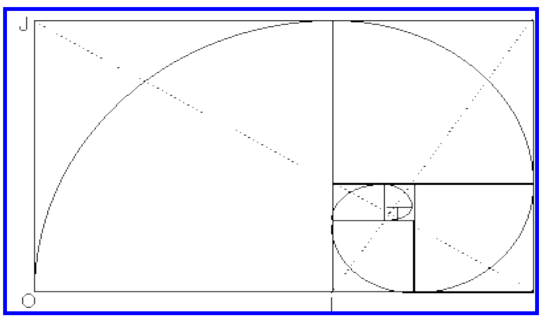
Το χρυσό ορθογώνιο έχει λόγο των πλευρών του ίσο με φ. α/β = φ .



Αν του αποκόψουμε ένα τετράγωνο με πλευρά β, το ορθογώνιο με πλευρές β, γ που θα απομείνει θα είναι και πάλι χρυσό, θα είναι δηλαδή β/γ = φ και αυτό θα συνεχίζεται επ’ άπειρον.

Χρυσό σπιράλ, κοχύλια και ηλιοτρόπια

Εάν αντί να χρησιμοποιήσουμε το ψαλίδι σχεδιάσουμε πάνω στο αρχικό ορθογώνιο τις τομές και σε κάθε τετράγωνο που δημιουργείται σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα τεταρτοκύκλια θα έχουμε αρχίσει να φτιάχνουμε το χρυσό ελικοειδές, το σπιράλ που σχεδιάζει η φύση και το διακρίνουμε στα κουκουνάρια, στα κοχύλια,



στα ηλιοτρόπια και στους τρόπους με
τους οποίους διευθετούνται τα πέταλα, τα φύλλα και τα κλαδιά ποικίλων προσωρινών κατοίκων της γήινης βιόσφαιρας.