Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες

Σ. Νεγρεπόντης, Β. Φαρμάκη

1. [παράλογη η αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών ?]

Ίσως το πιο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό **των Μαθηματικών** είναι το γεγονός ότι αυτά, και μόνο αυτά, είναι σε θέση να χρησιμοποιούνται για να ερμηνεύουν έγκυρα τον κόσμο μέσα στον οποίο βρισκόμαστε. Πράγματι, τα Μαθηματικά έχουν αποδειχθεί, μόνα αυτά από όλες τις επιστήμες, ικανά και αποτελεσματικά να εξηγήσουν σε βάθος τα φαινόμενα της φύσης, και να παράγουν μοντέλα βάσει των οποίων γίνονται ακριβείς προβλέψεις ακόμη και για φαινόμενα που βρίσκονται πέραν των αρχικών στόχων και προθέσεων του μοντέλου.

Αυτή τη δύναμη των Μαθηματικών την εξέφρασε με σαφή τρόπο ο Γαλιλαίος τον 17^{ο} αιώνα, ο οποίος είπε ότι **«οι νόμοι της φύσεως είναι γραμμένοι στη γλώσσα των μαθηματικών»**. Βέβαια προϋπήρχε και η ρήση του Πλάτωνος, ο οποίος, κατά τον Πλούταρχο στα ***Συμποσ ακά*** 718B, **«έλεγε τον Θεόν αεί γεωμετρείν».**

Μετά τα επιτεύγματα του Νεύτωνα στην κλασσική μηχανική, του Αϊνστάιν στην θεωρία σχετικότητας, του Heisenberg και άλλων στην κβαντική μηχανική, μέχρι και τη σύγχρονη θεωρία των υπερ-χορδών, η ρήση του Γαλιλαίου για την τότε φυσική ισχύει σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό για την σημερινή.

Και όχι μόνο για την φυσική
αλλά και **την πληροφορική**, τ**ην βιολογία, την γεωλογία (**ειδικότερα τη θεωρία των σεισμών, τα φαινόμενα του περιβάλλοντος και του κλίματος,)**,**
τις οικονομικές επιστήμες
(ειδικότερα **τα χρηματιστηριακά οικονομικά)**,
οι οποίες βασίζονται σε μαθηματικές θεωρίες,
είτε της Μαθηματικής Ανάλυσης (συνεχές, διαφορικές εξισώσεις)

είτε της συνδυαστικής και μαθηματικής λογικής,
είτε της θεωρίας πιθανοτήτων.

Με διαπιστωμένη και γενικά αποδεκτή αυτή τη δύναμη των Μαθηματικών, προκύπτει **το ερώτημα**: **Γιατί** τα Μαθηματικά, μια επιστήμη κατ' εξοχήν αφηρημένη και νοητή, συχνά θεωρούμενη ως απόμακρη από την πραγματικότητα, παρουσιάζει εν τούτοις τόσο τεράστια επιτυχία στην ερμηνεία των φαινομένων του κόσμου, που είναι, σε αντίθεση με τα Μαθηματικά, συγκεκριμένα και απτά?

Ο E. Wigner, ο οποίος στα 1963 έλαβε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής, σε ένα άρθρο του [W], το 1960, με τον ιδιαίτερα ενδιαφέροντα τίτλο:
«Η παράλογη αποτελεσματικότητα» ("unreasonable effectiveness") των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες,
καταλήγει στο συμπέρασμα ότι
«η τεράστια χρησιμότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες είναι κάτι που συνορεύει με **το μυστηριώδες** και δεν υπάρχει κάποια λογική εξήγηση για αυτήν».
Παρότι έκτοτε διάφοροι συγγραφείς, όπως π.χ. ο Hamming σε άρθρο του [H] στα 1980, προσπάθησαν να θέσουν τις βάσεις για κάποια εξήγηση, το ερώτημα του Wigner παραμένει ανοικτό. Το 2001 οι Halpern, Harper, Immerman, Kolaitis, Vardi και Vianu, με ένα άρθρο τους [HHIKVV], ο τίτλος του οποίου αποτελεί προφανή παραλλαγή του άρθρου του Wigner, έθεσαν το ίδιο ουσιαστικά ερώτημα για την «ασυνήθιστη αποτελεσματικότητα» ("unusual effectiveness") της Μαθηματικής Λογικής στην Πληροφορική.

Θα επιχειρήσουμε να ρίξουμε κάποιο φως σε αυτό το σκοτεινό ερώτημα του Wigner, με ένα τρόπο που ελπίζουμε ότι θα σας είναι εν μέρει τουλάχιστον κατανοητός.

Πιστεύουμε ακράδαντα ότι τα πιο χρήσιμα άρθρα και οι πιο χρήσιμες ομιλίες είναι εκείνες οι οποίες μας είναι εν μέρει μόνο κατανοητές, και αποτελούν, κατά το άλλο μη κατανοητό μέρος τους, ένα μακροπρόθεσμο σπόρο εντός μας που ενδέχεται να ενεργοποιηθεί στο μέλλον, από κάποιο άδηλο αλλά ευτυχή συνδυασμό τυχαιότητας και ωρίμανσης.

Πάντως τα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε περιορίζονται σε *Στοιχεία* Γεωμετρίας, στον Ευκλείδειο αλγόριθμο (πεπερασμένο και άπειρο, τον οποίο και θα εξηγήσουμε), και στους πίνακες αλήθειας βασικών λογικών προτάσεων.

2.[μερικά εμβαδά τριγώνων αντίθετα με τη διαίσθηση]

Απ' όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, τα μαθηματικά, υπήρχαν ήδη περί το 1800 π.χ. στην Αίγυπτο και την Βαβυλωνία. Οι αρχαίοι Έλληνες, οι οποίοι άρχισαν να ασχολούνται με τα Μαθηματικά περί το 600 π.Χ., πίστευαν ότι τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν στην Αίγυπτο προκειμένου να εξυπηρετηθούν πρακτικές ανάγκες,

η μεν γεωμετρία,

κυριολεκτικά η μέτρηση γης, για να υπολογίζονται εμβαδά, ώστε, μετά τις συχνές πλημμύρες του Νείλου που έσβηναν τα σύνορα, να αποδίδονται στους αγρότες ίσες εκτάσεις με αυτές που είχαν πριν από αυτές,

η δε αριθμητική

για τις ανάγκες των εμπορικών συναλλαγών.
Πιθανώς αυτή η περιγραφή της γένεσης των Μαθηματικών να είναι, σε γενικές γραμμές, σωστή, αν και δεν μας είναι άμεσα αντιληπτό πως και αν η θαυμάσια μέθοδος με την οποία οι Βαβυλώνιοι έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις ή η περίτεχνη μέθοδος με την οποία οι Αιγύπτιοι ανέλυαν κάποια κλάσματα, συνδέονταν με κάποιες πρακτικές ανάγκες.
Είναι πάντως γεγονός ότι όσο τα μαθηματικά περιορίζονταν
στο ρόλο εξυπηρέτησης πρακτικών αναγκών,
στο ρόλο του να τακτοποιούν με μια μεγαλύτερη ακρίβεια αυτό που έτσι κι αλλιώς περιμένουμε να ισχύει από την εμπειρία μας,
δεν ήταν σε θέση να αποκτήσουν την αυτονομία και υπεροχή που τα χαρακτηρίζει σήμερα.
Η υπεροχή των μαθηματικών πάνω στην διαίσθηση και την εμπειρία θα αρχίσει να φαίνεται,
όχι όσο τα μαθηματικά χρησιμεύουν για την τακτοποίηση της διαίσθησης και της εμπειρίας
αλλά όταν έρχονται σε σύγκρουση με αυτές.

Ας εξετάσουμε ένα απλό **ερώτημα** Ευκλείδειας γεωμετρίας:

Δ1

Θεωρούμε
το τρίγωνο Α με πλευρές (5, 5, 8)
και **το τρίγωνο Β με πλευρές (4.95, 4.95, 7).**

Ποιο τρίγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν?

Κάθε πλευρά του τριγώνου Α είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πλευρά του τριγώνου Β.

Για κάθε πρακτικά σκεπτόμενο άνθρωπο το τρίγωνο Α, με μεγαλύτερες 1-1 τις πλευρές του σε σχέση με εκείνες του τριγώνου Β, φαίνεται ότι περιέχει το τρίγωνο Β, και έτσι φαίνεται να έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το τρίγωνο Β.

Δ2

Όμως ένας στοιχειώδης υπολογισμός, με βάση το **Πυθαγόρειο** θεώρημα, δείχνει, αντίθετα από την πρακτική διαίσθηση, ότι

το μεν τρίγωνο Α έχει εμβαδόν 12,
ενώ
το ύψος υ του τριγώνου Β,
ως προς **τη βάση β=7**,
είναι μεγαλύτερο του 3.5

(εφόσον, από το Πυθαγόρειο θεώρημα,
$υ^2=(4.95)^2 – (3.5)^2 = 24.5025 – 12.25 =12.2525>12.25= (3.5)^2$),
και άρα
το εμβαδόν του τριγώνου Β είναι μεγαλύτερο από
β X υ/2=3.5 X 3.5= 12.25, άρα
μεγαλύτερο του 12!

Αξίζει να μείνουμε για λίγο στο παράδειγμα αυτό και να αναρωτηθούμε πως βρέθηκε το παράδειγμα, και πως μπορούν να βρεθούν και άλλα τέτοια παραδείγματα.
Θέτουμε ένα συναφές **ερώτημα** που ήδη είχε τέθει από τον Πρόκλο, τον αρχαίο σχολιαστή του Ευκλείδη (πρβλ. Πρόκλος, *εις Ευκλείδην* 403,14-404,14), και είναι το ακόλουθο:

Δ3

Ποιο από τα δύο τρίγωνα,

το τρίγωνο Α με πλευρές (5,5,8),
ή το τρίγωνο Γ με πλευρές (5,5,6),
έχει μεγαλύτερο εμβαδό?

Και πάλι οι περισσότεροι άνθρωποι, χωρίς αμφιβολία, θα απαντήσουν ότι το τρίγωνο Α με πλευρές (5,5,8) έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το Γ. Όμως η ορθή απάντηση είναι ότι τα δύο τρίγωνα έχουν **ίσο** εμβαδόν.

Δ4

Η απόδειξη βασίζεται στο ότι

οι αριθμοί (3,4,5) συγκροτούν μια Πυθαγόρεια τριάδα ($3^2+4^2=5^2$).

Δ5

Γενικά,
αν α < β < γ είναι μια πυθαγόρεια τριάδα
(δηλαδή αν $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$),
τότε τα τρίγωνα με πλευρές **(γ, γ, 2α)** και **(γ, γ, 2β)**,
έχουν **ίσο** εμβαδόν.

π.χ. οι αρχαίοι γνώριζαν και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι τριάδες **(ν, $(\nu^2-1)/2$, $(\nu^2+1)/2$)** **είναι Πυθαγόρειες για κάθε (περιττό) αριθμό ν,**
και άρα τα δύο τρίγωνα
με πλευρές **($(\nu^2+1)/2$, $(\nu^2+1)/2$, 2ν)**
και με πλευρές **($(\nu^2+1)/2$, $(\nu^2+1)/2$, ν^2-1)**
για κάθε **ν περιττό**,
(π.χ. τα τρίγωνα με πλευρές
(13,13,10) και (13,13,24)),
ή με πλευρές
(61,61,22) και (61,61,120)).
έχουν **ίσο** εμβαδόν.

Να παρατηρήσουμε τέλος ότι το τρίγωνο Β στο αρχικό παράδειγμα είναι μια μικρή τροποποίηση του τριγώνου Γ, ώστε να έχει κατά τι μεγαλύτερο εμβαδόν.

3. [Οι παράδοξες Προτάσεις Ι.35, 37 των *Στο χε ων*]

Οι δίδυμες 35η και 37η Προτάσεις του πρώτου βιβλίου των ***Στο χε ων*** του Ευκλείδη αξίζουν της προσοχής μας:

Δ6

Σύμφωνα με αυτές,
όλα τα παραλληλόγραμμα (αντίστοιχα, τρίγωνα),
που ευρίσκονται
μεταξύ δύο δοθεισών παραλλήλων γραμμών
και με δοθείσα τη βάση τους
στη μία από τις δύο παράλληλες,
έχουν ίσο εμβαδόν.

Σε πρώτη ανάγνωση, οι Προτάσεις αυτές ίσως να μη μας εκπλήσσουν ιδιαίτερα. Ας παρατηρήσουμε όμως ότι, στην Πρόταση Ι.37, τα **τρίγωνα** έχουν την ίδια βάση και συγχρόνως **αυθαίρετα μεγάλη** περίμετρο, η οποία δηλαδή τείνει στο άπειρο, χωρίς και να αναιρείται συγχρόνως το σταθερό του εμβαδού τους.

Όπως μας περιγράφει με λεπτομέρεια ο αρχαίος σχολιαστής των ***Στο χε ων*** του Ευκλείδη Πρόκλος, αυτή η κατάσταση είχε φανεί παράδοξη στους αρχαίους που δεν είχαν γεωμετρική παιδεία. Αναφέρει ο Πρόκλος τα ακόλουθα:

«Στους άπειρους περί την γεωμετρία αυτή η Πρόταση [Ι.35] θα φαίνονταν 'παντελώς θαυμαστόν', διότι αδυνατεί να αντιληφθεί 'πως είναι δυνατόν να αυξάνεται 'επ' 'απειρον' η περίμετρος, ενώ 'μενει η των χωρίων ισότης'…Έτσι αυτό το θεώρημα και το επόμενο για τρίγωνα [Ι.37] είναι μεταξύ των καλουμένων ΄παραδόξων θεωρημάτων' στα μαθηματικά.

…Τους πολλούς τους 'καταπλήττει' αμέσως το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους της πλευράς δεν 'αναιρεί την ισότητα των χωρίων', αν και η βάση παραμένει η αυτή.» (396,10-397,6)

«Ένοχοι μιας τέτοιας παρανόησης είναι εκείνοι οι πολεοδόμοι οι οποίοι υπολογίζουν το μέγεθος μιας πόλης από την περίμετρό της.

Και οι συμμετέχοντες στη διαίρεση ενός κτήματος παραπλάνησαν μερικές φορές τους υπόλοιπους … Έχοντας αποκτήσει κτήμα μεγαλύτερης περιμέτρου, το αντάλλαξαν αργότερα με κτήμα μικρότερης περιμέτρου και έτσι, λαμβάνοντας περισσότερα στην ανταλλαγή, κέρδισαν τη φήμη για ανώτερη εντιμότητα.» (403,5-14)

Γνωρίζουμε ότι στους χρόνους του Βυζαντίου το εμβαδόν των κτημάτων υπολογίζονταν από την περίμετρο τους. Ακόμη και σήμερα οι περισσότεροι άνθρωποι φαντάζονται ότι υπάρχει ένας συσχετισμός εμβαδού και περιμέτρου ενός σχήματος, και έτσι, αντιλαμβανόμενοι τις συνέπειες των Προτάσεων I.35, 37, θα έχουν δυσκολία να τις δεχθούν, αντίθετα θα αμφιβάλλουν για την αλήθεια τους και θα συμφωνήσουν ότι έχουν στοιχεία παραδοξότητας. Θα σκεφθούν: «Αυτές οι Προτάσεις αντίκεινται στην διαίσθηση μου και δεν πρέπει να είναι σωστές».

Είναι όμως γεγονός ότι οι Προτάσεις είναι αληθείς. Είναι δε αληθείς για ένα και μοναδικό λόγο: διότι, έχουν μαθηματική απόδειξη, η οποία ακολουθεί αυστηρούς αποδεικτικούς κανόνες, οπού δεν υπάρχει το ‘σχεδόν’ και το ‘περίπου’, και τις οποίες ο καθένας με τη δική του σκέψη μπορεί να μελετήσει, να επιχειρήσει να ελέγξει, και τελικά, πειθόμενος από την λογική και μόνο, να τις δεχθεί.

Είμαστε εδώ μάρτυρες μιας νέας και πρωτόγνωρης κατάστασης στην Ιστορία` Μαθηματικών: τα Μαθηματικά **δεν** περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν.

Συνειδητοποιείται ότι

η μεν διαίσθηση, η οποία γενικά είναι ένας χρήσιμος οδηγός της σκέψης, δεν είναι αλάνθαστη, αντίθετα μερικές φορές μας οδηγεί σε λάθος δρόμο και συμπεράσματα,

τα δε Μαθηματικά είναι η μόνη επιστήμη που είναι σε θέση να αποφανθεί με βεβαιότητα και ακρίβεια κατά πόσον μια Πρόταση, ένας ισχυρισμός, **ισχύει**, αυτό δε συμβαίνει μόνο όταν η Πρόταση **έχει μαθηματική απόδειξη**.

Να σημειώσουμε ότι η σύγκρουση διαισθητικής και μαθηματικής σκέψης συνέβη, στο παράδειγμα αυτό, αποκκειστικά και μόνο από το γεγονός ότι αφήσαμε μια παράμετρο, την περίμετρο, **να τείνει ανεμπόδιστα στο άπειρο**.

Αυτή η σύγχρονη εμφάνιση του άπειρου με το φαινομενικά παράδοξο κάθε άλλο παρά τυχαία είναι, όπως θα δούμε.

4. [η ασυμμετρία της χρυσής τομής]

Ο μεγάλος αρχαίος φιλόσοφος Πλάτων στους ***Νόμους*** 819d-e θεωρεί ότι η άγνοια των ανθρώπων **σε κάποιο συγκεκριμένο ερώτημα** είναι τόσο ασυγχώρητη, ώστε αυτοί θυμίζουν περισσότερο 'ύηνα θρέμματα', χοίρους δηλαδή, παρά ανθρώπους, και το διαδεδομένο της άγνοιας αυτής τον κάνει, όπως δηλώνει, να νοιώθει ντροπή για όλους τους Έλληνες.

Το συγκεκριμένο ερώτημα, στο οποίο αναφέρεται ο Πλάτων με τόσο δριμείς όρους, είναι σαφώς μαθηματικό, και πρόκειται για το ακόλουθο:

Δ7

**Είναι πάντοτε δυνατόν,
δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β,
να βρεθεί ένα τρίτο ευθύγραμμο τμήμα γ,
το οποίο να μετράει (ακριβώς) και το α και το β?
Δηλαδή ερωτά αν υπάρχουν
ευθύγραμμο τμήμα γ και φυσικοί αριθμοί μ,ν ώστε α=μγ, β=νγ.**

**Να διευκρινισθεί ότι δεν ενδιαφέρει το μέγεθος του γ, μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό.
Ενδιαφέρει μόνο αν υπάρχει τέτοιο γ?**

Οι περισσότεροι άνθρωποι θα απαντήσουν θετικά (ναι υπάρχει), ενώ η ορθή απάντηση είναι αρνητική (όχι πάντοτε). Ο Πλάτων, στο χωρίο που είδαμε παραπάνω, έψεγε τους Έλληνες ακριβώς για αυτή την άγνοια τους.

Έχουμε εδώ μια πολύ μεγάλη στιγμή στην Ιστορία των Μαθηματικών, ίσως και την μεγαλύτερη. Οι Πυθαγόρειοι είχαν πλέον αποκτήσει τόσο μεγάλη εμπιστοσύνη στην ανωτερότητα της Μαθηματικής επιστήμης, ώστε γι' αυτούς, και για όσους, όπως ο Πλάτων, ασπάζονταν τον θαυμασμό τους στα Μαθηματικά, η αντίθετη διαίσθηση φανέρωνε μια άγνοια που ήταν άξια περιφρόνησης.

Ας δούμε σε κάποια λεπτομέρεια την όντως καταπληκτική μέθοδο με την οποία οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν αυτό το θεμελιώδες μαθηματικό φαινόμενο. Για την ανακάλυψη αρκεί να επιδειχθεί ένα ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων α,β που δεν έχουν κοινό μέτρο.

Δ8

Θα λέμε, **εξ ορισμού**, ότι

δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β, με α>β, ευρίσκονται στη σχέση 'χρυσής τομής' αν ικανοποιείται η σχέση α/β=β/(α-β), ισοδύναμα, αν $α^2=αβ+β^2$.

Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα **να κατασκευασθεί** ένα τέτοιο ζεύγος
(και η κατασκευή υπάρχει στην Πρόταση 11 του δεύτερου βιβλίου των ***Στο χε ων***):
έστω α ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

Σχηματίζουμε ένα

ορθογών ο τρ γωνο με πλευρές περ την ορθή γων α μήκους α κα α/2.
Έστω γ η υποτε νουσα του τρ γώνου αυτού.

Εφόσον ***γ>α>α/2,***

υπάρχε ευθύγραμμο τμήμα β ώστε γ=β+(α/2).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, εφαρμοζόμενο στο ορθογώνιο τρίγωνο (α/2,α,γ), έπεται άμεσα ότι

α κα β ευρ σκοντα στη σχέση της χρυσής τομής.

Πρόταση ($\boxed{\text{Βασική ιδιότητα της χρυσής τομής}}$).
Αν α και β ευρίσκονται στη σχέση χρυσής τομής,
τότε δεν υπάρχει για τα α και β κοινό μέτρο.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην Πυθαγόρεια απόδειξη αυτής της Πρότασης χρειαζόμαστε

Δ9	**Δ10**

την μέθοδο εύρεσης του **μέγιστου κοινού διαιρέτη (ΜΚΔ)** δύο φυσικών αριθμών.
(Αυτή η μέθοδος σαφώς πρέπει να διδάσκεται σε κάποια τάξη του Γυμνασίου.
Δεν είμαστε βέβαιοι αν μπορουμε να τη θεωρήσουμε γνωστή, και γι' αυτό θα την περιγράψουμε εδώ).

Έστω μ και ν δύο φυσικοί αριθμοί.
Ο ΜΚΔ των μ,ν ευρίσκεται με
την μέθοδο του λεγόμενου Ευκλείδειου αλγόριθμου:

Αν μ=ν, τοτε βέβαια ΜΚΔ (μ,ν)=μ.
Έστω μ>ν.
Διαιρούμε τον μ δια του ν.
Υπάρχουν ένας αριθμός $κ_1$, το πηλίκο, και ένας αριθμός $γ_1$, το υπόλοιπο, ώστε $μ=κ_1ν+γ_1$, με $γ_1<ν$.
Αν $γ_1=0$, τότε η διαδικασία τελειώνει και ΜΚΔ(μ,ν)=ν.
Αν $γ_1>0$, τότε, εφόσον $γ_1<ν$, διαιρούμε τον ν δια του $γ_1$.
Υπάρχουν ένας αριθμός $κ_2$, το πηλίκο, και ένας αριθμός $γ_2$, το υπόλοιπο, ώστε $ν=κ_2γ_1+γ_2$, με $γ_2<γ_1$.
Αν $γ_2=0$, τότε η διαδικασία τελειώνει και $ΜΚΔ(μ,ν)=γ_1$ (όπως εύκολα μπορεί ν' αποδειχθεί).
Αν $γ_2>0$, τότε, εφόσον $γ_2<γ_1$, διαιρούμε τον $γ_1$ δια του $γ_2$.
Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται.
Εφόσον οι μη αρνητικοί φυσικοί αριθμοί

$\mu > \nu > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots$
είναι γνήσια φθίνουσα,
η διαιρετική διαδικασία θα τελειώσει μετά από ένα πεπερασμένο (το πολύ ν) αριθμό βημάτων.
Μπορούμε ν' αποδείξουμε, χωρίς δυσκολία, ότι
το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι ο ΜΚΔ των μ,ν.

Ερχόμαστε τώρα στην **απόδειξη** της Πρότασης.
Θα εφαρμόσουμε το ανάλογο του Ευκλειδείου αλγόριθμου, όχι για αριθμούς, αλλά για τα ευθύγραμμα τμήματα α και β.
Και αρκεί ν' αποδείξουμε ότι
ο Ευκλείδειος αλγόριθμός
για το ζεύγος α, β είναι άπειρος.

Δ11

Διότι
αν υποθέσουμε ότι
υπάρχουν
ευθύγραμμο τμήμα γ και φυσικοί αριθμοί μ, ν
ώστε $\alpha = \mu\gamma$, $\beta = \nu\gamma$,
τότε είναι σαφές ότι
ο Ευκλείδειος αλγόριθμος των ευθυγράμμων τμημάτων α, β
ταυτίζεται σε όλα τα βήματα με
τον Ευκλείδειο αλγόριθμο των φυσικών αριθμών μ, ν,
και άρα είναι κατ' ανάγκη πεπερασμένος.

Δ12

Παρατηρούμε ότι σαφώς $\alpha > \beta$.
Επίσης έχουμε
$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, και $\alpha - \beta < \beta$, εφόσον $\alpha/\beta = \beta/(\alpha - \beta)$ και $\alpha > \beta$.
Άρα η διαίρεση του α δια του β έχει **πηλίκο 1** και **υπόλοιπο $\gamma_1 = \alpha - \beta$.**
Η κρίσιμη παρατήρηση τώρα είναι ότι
και το ζεύγος β, γ_1 ευρίσκεται σε σχέση χρυσής τομής.

Πράγματι, $\beta/\gamma_1 = \gamma_1/\beta-\gamma_1$ είναι ισοδύναμη προς $\beta(\beta-\gamma_1)=\gamma_1^2$, και αυτή ισοδύναμη προς $\beta^2-\beta(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)^2$ ισοδύναμη προς $\beta^2+\beta^2-\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$, ισοδύναμη προς $\beta^2+\alpha\beta=\alpha^2$, η οποία ισχύει!

Δ13

Αυτό τώρα σημαίνει ότι

ο Ευκλείδειος αλγόριθμος για την χρυσή τομή είναι άπειρη,
και δίδει πάντοτε, σε κάθε στάδιο πηλίκο 1.

Δ14

Με την ίδια μέθοδο μπορεί ν' αποδειχθεί ότι

η διαγώνιος-διάμετρος
και η πλευρά ενός τετραγώνου
είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα τα οποία
δεν έχουν κοινό μέτρο.

Παρατηρούμε ότι η ασυμμετρία δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι στενά συνδεδεμένη, στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμη, με την **απειρία** του Ευκλείδειου αλγόριθμου.

5.[το μεγάλο πλήθος αρρήτων πραγματικών αριθμών]

Μεταφερόμενοι τώρα στα σύγχρονά μαθηματικά είναι εύκολο να δούμε ότι η αρχαία έννοια της **ασυμμετρίας** είναι ισοδύναμη με τη σύγχρονη έννοια **των αρρήτων** πραγματικών αριθμών.
Ο λόγος της χρυσής τομής αντιστοιχεί στον άρρητο πραγματικό αριθμό $(1+5^{1/2})/2$, και
ο λόγος διαγωνίου προς πλευρά τετραγώνου αντιστοιχεί στον άρρητο πραγματικό αριθμό $2^{1/2}$.
Έτσι η ύπαρξη **άρρητων** πραγματικών αριθμών έχει αποδειχθεί, και σε κάθε άρρητο αντιστοιχεί ένας **άπειρου** μήκους Ευκλείδειος αλγόριθμος.

Παρ’ ότι η απόδειξη ύπαρξης των αρρήτων μας υποχρεώνει να τους δεχθούμε, το πιο πιθανό είναι ότι δεν παύουμε με την διαίσθηση μας πεισματικά να πιστεύουμε ότι είναι **μεν** αναγκαίο γεγονός ότι υπάρχουν κάποιοι άρρητοι αριθμοί**, αλλά** αυτοί θα πρέπει να αποτελούν ένα είδος ασυνήθιστης ανωμαλίας μέσα στον ωκεανό των πιο οικείων και ομαλών κλασμάτων και ρητών αριθμών.

Προσπαθώντας να διαπιστώσουμε αν η διαίσθηση μας είναι αυτή τη φορά σωστή, ας θέσουμε στον εαυτό μας **το ακόλουθο ερώτημα**:

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το φανταζόμαστε ως ένα συνεχές, ως μία ευθεία εκτεινόμενη επ’ άπειρο προς τη θετική και την αρνητική κατεύθυνση, μέσα δε σε αυτό το σύνολο βρίσκονται, ως σημεία, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, οι φυσικοί, οι ακέραιοι, τα κλάσματα, οι ρητοί, και οι ασύμμετροι, όπως ο ρίζα 2.

Ας κλείσουμε τα μάτια και ας επιλέξουμε στην τύχη ένα σημείο στο συνεχές των πραγματικών αριθμών.

Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ρητό αριθμό και ποιά πιθανότητα άρρητο ?

Η διαίσθηση, σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, μας λέει ότι οι πιο συχνά εμφανιζόμενοι στις συναλλαγές μας, και άρα οι ‘περισσότεροι’ πραγματικοί αριθμοί δεν μπορεί παρά να είναι οι ρητοί,

μια διαίσθηση η οποία ισχυροποιείται αν συμβεί να έχουμε διδαχθεί και την ιδιότητα πυκνότητας, όπως αποκαλείται, των ρητών αριθμών, ότι δηλαδή μεταξύ κάθε δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει και ένας ρητός.

Όμως για άλλη μια φορά η διαίσθηση μας, σε σχέση με φαινόμενα απειρίας, είναι λανθασμένη. Στην πραγματικότητα με πιθανότητα ΕΝΑ, δηλαδή με πιθανοθεωρητική βεβαιότητα, ο αριθμός που τυχαία επιλέξαμε θα είναι άρρητος, και με πιθανότητα ΜΗΔΕΝ ρητός!

Δηλαδή υπάρχουν **απείρως** περισσότεροι άρρητοι αριθμοί από ότι ρητοί, κλάσματα, το δε σύνολο των ρητών μέσα στο σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών είναι αμελητέο.

Ακόμη δε και μεταξύ των αρρήτων, υπάρχουν οι ‘χειρότεροι’ (οι λεγόμενοι **υπερβατικοί** άρρητοι) και οι ‘καλύτεροι’ (οι **αλγεβρικοί** άρρητοι, όπως είναι η χρυσή τομή και η ρίζα 2). Οι απείρως περισσότεροι άρρητοι είναι οι χειρότεροι, σε σχέση με τους οποίους οι καλύτεροι είναι επίσης αμελητέοι.

Εθισμένοι όπως είμαστε στους ρητούς και έχοντας, εν πολλοίς, άγνοια των αρρήτων, εκ πρώτης όψεως μας φαίνεται παράδοξος αυτός ο ισχυρισμός, και ίσως να έχουμε δυσκολία να τον πιστέψουμε, όμως η λογική της μαθηματικής σκέψης είναι άτεγκτη και στο τέλος ηττά την διαίσθηση.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με όλο το πλήθος των αρρήτων που περιέχει, είναι εντελώς αναγκαίο για την ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης, πάνω στην οποία δομείται η θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων, η οποία εξηγεί κατά κύριο λόγο τα φυσικά φαινόμενα. Αυτό συμβαίνει διότι για την ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης πρέπει να υπάρχουν **όρια,** παντού όπου αυτά θα αναμέναμε να υπάρχουν, έστω και αν αυτά δεν είναι κατασκευάσιμα. Καθώς **το όριο** είναι κατά βάση μια **άπειρη** διαδικασία, οι πραγματικοί αριθμοί (με την απαίτηση να ικανοποιείται **η συνθήκη πληρότητας**) είναι έτσι δομημένοι, ώστε να έχουν το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος τέτοιων **απείρων** διαδικασιών.

Σε ακόμη βασικότερο επίπεδο βρίσκεται **η θεωρία Συνόλων** του Cantor, όπου κεντρικό αξίωμα είναι

η ύπαρξη **άπειρου** συνόλου,

οριζόμενου ως ενός συνόλου που βρίσκεται σε 1-1 αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

Στη συνολοθεωρία αποδεικνύεται ότι υπάρχουν διάφορα μεγέθη **απείρου**,

το δε μέγεθος **απειρίας** των ρητών είναι μικρότερο από εκείνο των αρρήτων.

6. [Πλατωνικές μονάδες]

Υπάρχει μια επίπτωση της ύπαρξης ασυμμέτρων προς την κατεύθυνση της **φιλοσοφίας**, η οποία μετά τα όσα έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ιδιαίτερα προσβάσιμη, και θα είναι κρίμα να την προσπεράσουμε, καθώς είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Το γεγονός ότι η επιστήμη των Μαθηματικών είναι σε θέση, με την αφηρημένη σκέψη, να ανακαλύπτει οντότητες που δεν συναντώνται στην ορατή, αισθητή πραγματικότητα, όπως για παράδειγμα τους άρρητους αριθμούς, οδήγησε τους αρχαίους Ελληνες στο φιλοσοφικό συμπέρασμα ότι πίσω και υπεράνω της αισθητής πραγματικότητας υπάρχει **η νοητή**.

Αυτή είναι η βάση της Πλατωνικής φιλοσοφίας, που είχε και εξακολουθεί να έχει μια τεράστια επίδραση στην ανθρώπινη σκέψη. Ο Πλάτων, βαθειά επηρεασμένος από τα Μαθηματικά, πίστευε στην ύπαρξη των **Ιδεών**, νοητών οντοτήτων ανωτέρων από τον αισθητό κόσμο στον οποίο ζούμε. Θα προσπαθήσω να σας περιγράψω τόσο τη μαθηματική φύση αυτών των Ιδεών, καθώς και τη στενή σχέση τους με πράγματα σύγχρονα.

Η έννοια που θα προσπαθήσουμε να σας περιγράψουμε είναι αυτή της **Μονάδας**. Τι είναι μονάδα? Λέμε συχνά 'μονάδα μέτρησης', π.χ. στα χρήματα έχουμε ως μονάδα 'το ένα ευρώ', το οποίο όμως υποδιαιρείται σε 100 λεπτά. Έτσι η πραγματική μονάδα χρημάτων είναι το ένα λεπτό, το οποίο δεν υποδιαιρείται σε καμιά μικρότερη μονάδα. Το σημείο στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε είναι ότι όταν λέμε ότι κάτι είναι μονάδα, εννοούμε, με κάποια έννοια, ότι αυτή η Μονάδα είναι **αδιαίρετη**.

Ποια όμως είναι αυτή η έννοια?

Αναζητούμε μια ενοποιητική οντότητα που ελέγχει και καθοδηγεί τον αισθητό κόσμο, ο οποίος χαρακτηρίζεται από έλλειψη ενότητας, από ποικιλία και κατακερματισμό.

Έτσι αναζητούμε ένα αντικείμενο που συγχρόνως κατακερματίζεται (ώστε να είναι σε θέση να περιγράψει όλη την ποικιλία των αισθητών φαινομένων) και παραμένει ενωμένο (ώστε να αξίζει της ονομασίας Μονάδα). Αυτό φαίνεται αληθινά κάτι το παράδοξο, και ασφαλώς δεν έχουμε κάτι αντίστοιχο στον κόσμο που ζούμε.

Όμως αν σκεφθούμε μπορεί να βρούμε μια σοβαρή προσέγγιση σε μια τέτοια έννοια της Μονάδας, στο DNA κάθε ζώντος οργανισμού.

Ο μεν ζων οργανισμός μπορεί να τεμαχισθεί σε πολλά μέρη, πολύ διαφορετικά το ένα από το άλλο, όμως κάθε μέρος, σχεδόν όσο μικρό και αν είναι, έχει ακριβώς το ίδιο DNA. Ακόμη και μια λεπτή ανθρώπινη τρίχα περιέχει όλο το DNA, από όπου θεωρητικά τουλάχιστον είναι δυνατόν να επιχειρηθεί η πλήρης ανασύσταση του ατόμου με κλωνοποίηση.

Έτσι η πανταχού παρουσία του DNA στον διαιρούμενο σε πολλά μέρη ζώντα οργανισμό δρά ενωποιητικά.

Βέβαια η διαίρεση ενός ζώντος οργανισμού δεν μπορεί να προχωρήσει επ' άπειρον, καθώς μετά από κάποιο στάδιο διαίρεσης θα αναγκασθούμε να διαιρέσουμε το ίδιο το DNA.

Την Πλατωνική Ιδέα θα πρέπει να την φαντασθούμε ως μια τέλεια τέτοια μονάδα. Είναι μια Μονάδα που έχει πολλά, **άπειρα** το πλήθος, μέρη, κάθε ένα όμως μέρος είναι όπως το όλο—και με αυτή την έννοια η Ιδέα είναι αδιαίρετη.

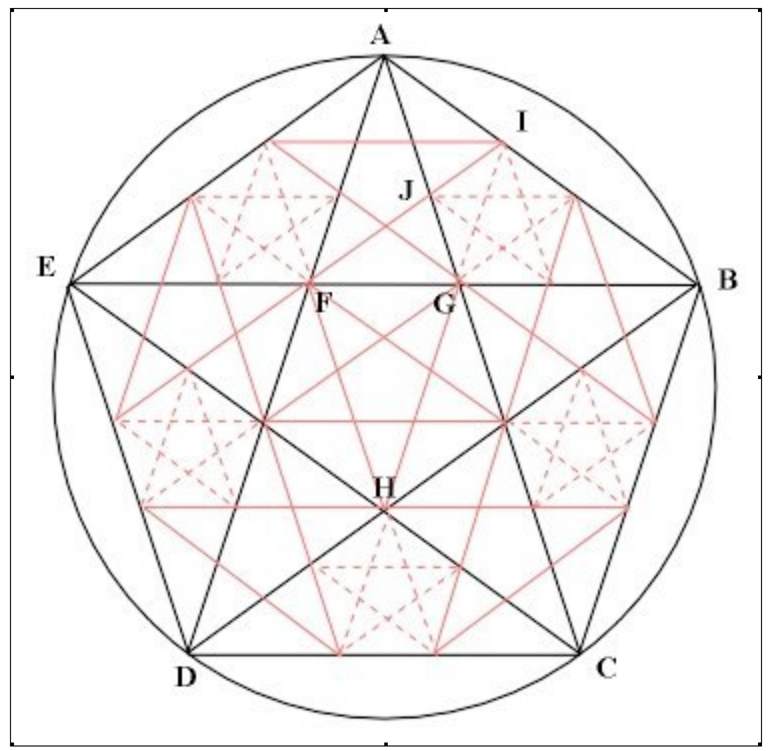
Βέβαια ένα τέτοιο αντικείμενο θα μπορούσε κάποιος να το σκεφθεί μόνο αν προϋπήρχε το μαθηματικό μοντέλο.

Τίθεται έτσι το ερώτημα: προϋπήρχε άραγε ένα τέτοιο μαθηματικό μοντέλο στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά?

Θέλω να σας προτείνουμε ότι η χρυσή τομή, που εξετάσαμε παραπάνω, είναι ακριβώς ένα τέτοιο μοντέλο, στην πιο απλή μορφή του. Σύμφωνα με την Πρόταση 11 του τέταρτου βιβλίου των ***Στο χε ων***, η διάμετρος και η πλευρά του κανονικού πενταγώνου ευρίσκονται σε σχέση χρυσής τομής.

Δ15

Στο κανονικό πεντάγωνο γίνεται εμφανής η αυτό-ομοιότης της χρυσής τομής (όπως τόνισε ο von Fritz, στην εργασία του [F]): Το αρχικό πεντάγωνο δημιουργεί ένα μικρότερο πεντάγωνο, και αυτό ένα μικρότερο, **επ' άπειρον**, ώστε κάθε μέρος του πενταγώνου είναι το ίδιο με το όλον.



Και άρα κάθε μέρος της χρυσής τομής είναι, με αντίστοιχη έννοια, **το ίδιο όπως το όλον.**

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, αναφέρουμε μόνο ότι και τα περίφημα **παράδοξα του Ζήνωνος**
(όπως εκείνο του Αχιλλέα και της χελώνας)
ερμηνεύονται με βάση την αυτό-ομοιότητα.

7. [Fractals και το παιχνίδι από το χάος στην τάξη]

Έχουμε περιγράψει μια ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση όπου η μαθηματική σκέψη, προσφέροντας το μοντέλο για τέτοιες φιλοσοφικές Μονάδες, **διεύρυνε** ανυπολόγιστα την έννοια της ανθρώπινης πραγματικότητας.

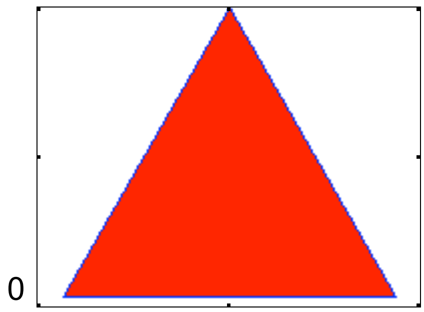
Για χιλιάδες χρόνια, η μόνη χρήση αυτών των Μονάδων περιορίστηκε στη φιλοσοφία, και, πολύ πιθανόν, και στην θεολογία.

Όμως στη σύγχρονη περίοδο **αυτά τα αντικείμενα** επανακαλύφθηκαν, εντοπίσθηκαν, και σήμερα αποτελούν τα πλέον θεμελιώδη εργαλεία για την λεγόμενη θεωρία του χάους, η οποία είναι θεμελιώδης για την ερμηνεία του σύμπαντος, και για πλήθος άλλων εφαρμογών, μόνο λίγες των οποίων πρέπει να είναι οι ήδη γνωστές. Πρόκειται για τα αντικείμενα που καλούνται fractals, ‘θραυσματικά’ στην ελληνική απόδοση, και παρουσιάζουν ακριβώς αυτήν την αυτό-ομοιότητα της Μονάδας και της Πλατωνικής Ιδέας, που περιγράψαμε παραπάνω.

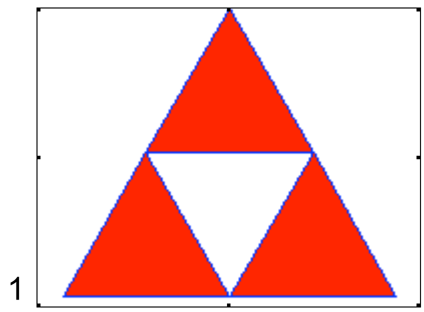
Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια, ας εξετάσουμε ένα σύγχρονο τέτοιο σύνολο fractal, το οποίο εισήγαγε στα 1915 ο Sierpinski:

Δ16

Ένα αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο (Στάδιο 0):

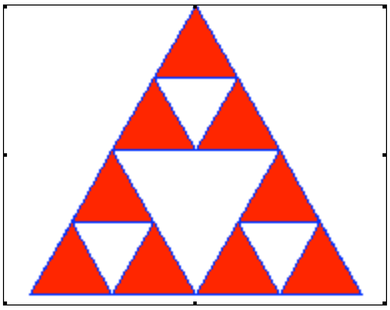


υποδιαιρείται σε τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα (Στάδιο 1), αφαιρώντας το μεσαίο (λευκό):



Ο ίδιος κανόνας εφαρμόζεται τώρα σε κάθε ένα από τα τρία τρίγωνα που έχουν απομείνει (Στάδιο 2), προκύπτουν δε 9 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα:

2

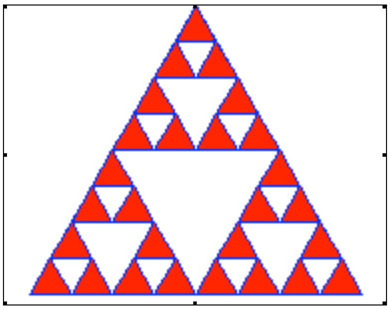


Δ17

Τον ίδιο κανόνα εφαρμόζουμε τώρα σε κάθε στάδιο k
(π.χ. τα Στάδια 3 και 4 είναι τα ακόλουθα):

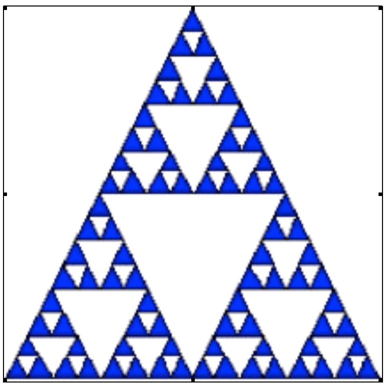
Στάδιο 3

3



Στάδιο 4

3



Αντιλαμβανόμαστε ότι, όταν συμπληρώσουμε όλα τα άπειρα το πλήθος στάδια, και μόνο τότε, κάθε μέρος (τρίγωνο) το οποίο δημιουργείται είναι ακριβώς το ίδιο σύνολο Sierpinski, και άρα είναι το ίδιο με το όλον. Αυτή είναι ακριβώς η σύγχρονή έννοια του συνόλου fractal, η οποία συμπίπτει με την αρχαία Πλατωνική έννοια της Μονάδος.

Θα πίστευε κανείς πάλι διαισθητικά ότι αυτά τα σύνολα fractal, υπάρχουν μεν, αφού έχει αποδειχθεί η ύπαρξη τους,

αλλά δεν μπορεί παρά να είναι εξαιρετικά σπάνια και να ανακύπτουν σε καταστάσεις μεγάλης τάξης και οργάνωσης.

Για να αποδειχθεί και εδώ, για μια ακόμη φορά, λανθασμένη η διαίσθηση, θα περιγράψουμε

το λεγόμενο παιχνίδι του χάους (game of chaos),

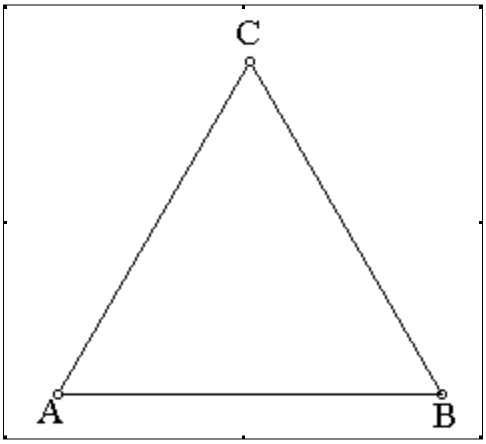
για το οποίο μπορείτε να βρείτε πολλές πληροφορίες στο Internet

(π.χ. http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html,
http://ejad.best.vwh.net/java/fractals/sierpinski.shtml,
http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node1.html,
http://www.efg2.com/Lab/FractalsAndChaos/SierpinskiTriangle.htm,
http://school.discovery.com/lessonplans/activities/chaosgame/,
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SierpinskiChaosGame.shtml,
http://www.cevis.uni-bremen.de/fractals/nsfpe/Chaos_Game/Chaos1.html),

και το οποίο αποδεικνύει, και αυτό είναι όντως εκπληκτικό, ότι αυτά τα αυτό-όμοια αντικείμενα υψηλής τάξης ανακύπτουν μέσα από συνθήκες τυχαιότητος και χάους.

Δ18

Σε ένα επίπεδο (χαρτί) κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές A, B, C, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Κανόνες του παιχνιδιού

Επιλέγουμε στο επίπεδο ένα τυχαίο σημείο Σ.

Τώρα ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι (εδώ υπεισέρχεται απόλυτη τυχαιότης),

και, με βάση τους παρακάτω τρείς κανόνες, ορίζουμε το σημείο $Σ_1$.

(1) Αν το ρίξιμο δείξει 1 ή 2, τότε το σημείο $Σ_1$ είναι το σημείο το οποίο βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος από το Σ στο A.

(2) Αν το ρίξιμο δείξει 3 ή 4, τότε το σημείο $Σ_1$ είναι το σημείο το οποίο βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος από το Σ στο B.

(3) Αν το ρίξιμο δείξει 5 ή 6, τότε το σημείο $Σ_1$ είναι το σημείο το οποίο βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος από το Σ στο C.

Με τον ίδιο κανόνα, ρίχνουμε ξανά το ζάρι (εδώ πάλι υπεισέρχεται απόλυτη τυχαιότης), και ορίζουμε το σημείο $Σ_2$, ξεκινώντας από το σημείο $Σ_1$ (στη θέση του Σ).

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (ρίχνοντας κάθε φόρα το ζάρι)

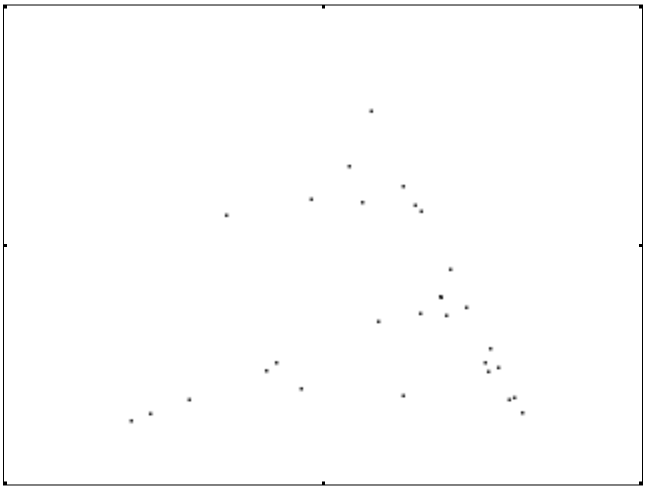
ορίζουμε σημεία Σ, $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$, …, $Σ_κ$, …

Τι μπορούμε να περιμένουμε για την θέση των σημείων αυτών?

Η τυχαιότητα, την οποία επιβάλλει το ρίξιμο του ζαριού κάθε φορά, μας οδηγεί στη διαίσθηση ότι τα σημεία θα αποτελούν ένα **τυχαίο, χαώδες** σύνολο σημείων, διαφορετικό για κάθε παρτίδα.

Δ19α

Σε μια τέτοια παρτίδα του παιχνιδιού, μετά από 30 ριξίματα του ζαριού, κατεγράφησαν τα ακόλουθα σημεία ($Σ_1$,…,$Σ_{30}$):



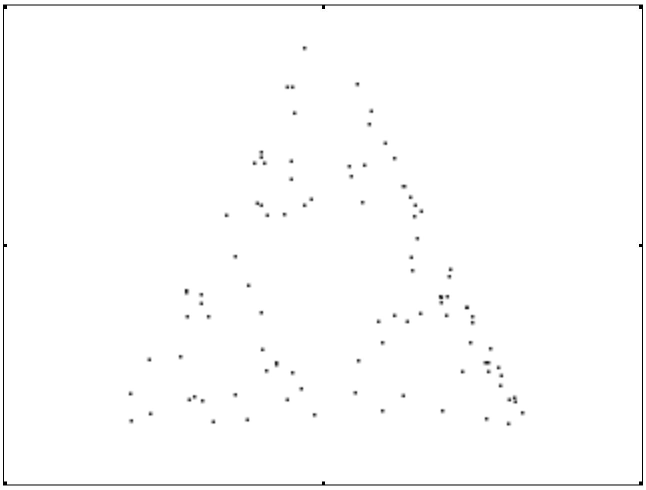
Τα σημεία βρίσκονται όλα, εκτός ενός, μέσα στο τρίγωνο. Αυτό, αν σκεφθούμε λίγο δεν είναι και τόσο αναπάντεχο.

Υπάρχει όμως κάποια τάξη στα σημεία?

Δεν φαίνεται κάτι τέτοιο.

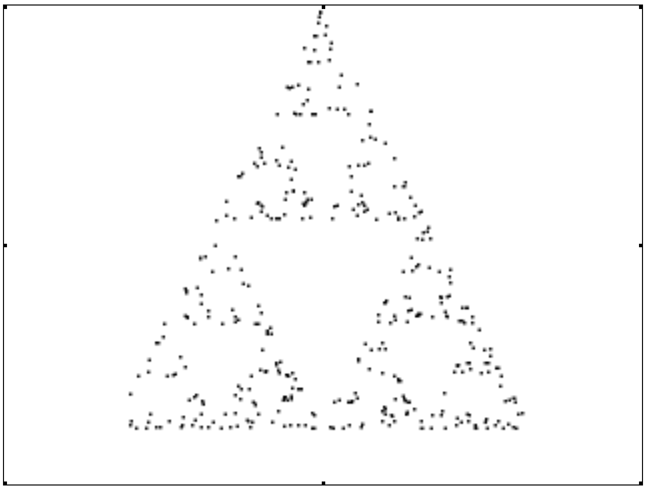
Δ19β

Μετά από 100 ριξίματα καταγράφονται τα ακόλουθα σημεία ($Σ_1$,…,$Σ_{30}$,…,$Σ_{100}$):



Δ20

Μετά από 400 ριξίματα του ζαριού αρχίζει να καταγράφεται μια κανονικότητα των σημείων ($Σ_1,\ldots,Σ_{30},\ldots,Σ_{100},\ldots,Σ_{400}$):



Δ21

Και μετά από 30 000 ριξίματα καταγράφεται

από τα σημεία ($Σ_1,\ldots,Σ_{30},\ldots,Σ_{100},\ldots,Σ_{400},\ldots,Σ_{30\,000}$)

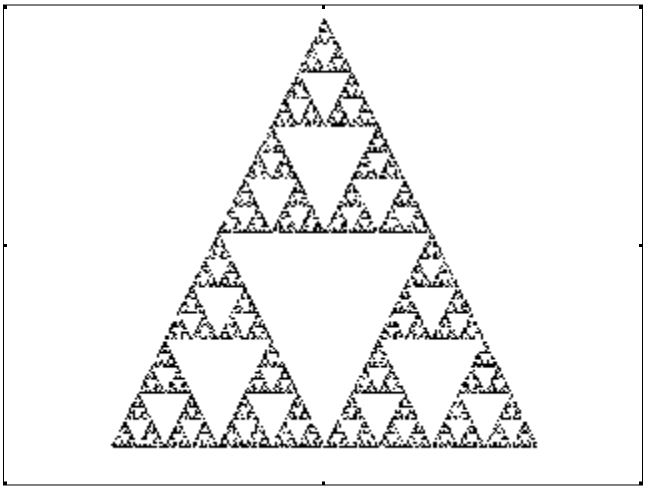
με απόλυτη σαφήνεια,

όχι κάποιο τυχαίο σύνολο,

όπως θα περίμενε κανείς εκ πρώτης όψεως

από την τυχαιότητα που επιβάλλει το ρίξιμο του ζαριού κάθε φορά,

αλλά το σύνολο fractal του Sierpinski:



Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η παραγωγή τάξης από το χάος στο παιχνίδι αυτό δεν είναι καθόλου μεμονωμένο φαινόμενο, αλλά, υπό ορισμένες γενικές συνθήκες, ο κανόνας.

8. [η δύναμη και αποτελεσματικότητα των συμβατών παραδόξων]

Τα παραδείγματα που αναφέραμε είναι αρκετά για να δείξουν καθαρά ότι η ενασχόληση των Μαθηματικών με **το άπειρο** οδηγεί σε καταστάσεις που αντίκεινται **μεν** στην κοινή διαίσθηση και είναι φαινομενικά παράδοξες, είναι **όμως** οι καταστάσεις εκείνες οι οποίες οδηγούν στην ανακάλυψη των πλέον σημαντικών μαθηματικών δομών, όπως είναι οι άρρητοι πραγματικοί αριθμοί, τα όρια, και τα αυτό-ομοια αντικείμενα.

Για να συμπληρωθεί η απάντηση στο ερώτημα του Wigner, υπάρχει ένα τελευταίο **ερώτημα**:

Πως εξηγείται το ότι αυτή ακριβώς η ενασχόληση των Μαθηματικών με **το άπειρο** και με **τα φαινομενικά παράδοξα** που ανακύπτουν από αυτό, καθιστά τα Μαθηματικά ισχυρότερα και με μεγαλύτερη δύναμη ερμηνείας των φαινομένων?

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα καταστεί αρκετά σαφής αν λάβουμε υπόψη τις ακόλουθες απλές παρατηρήσεις.

Δ22

Η πρώτη παρατήρηση αφορά στην λογική ανάλυση της πρότασης

'p και q' με πίνακες αληθείας:

p	**q**	**p και q**
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Κατά συνέπεια

η πρόταση **'p και όχι p'**

p	**όχι p**	**p και όχι p**
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ

είναι **ΨΕΥΔΗΣ (Ψ)**

για κάθε πρόταση p και αντιφατική**.**

Δ23

Μας χρειάζεται επίσης η λογική ανάλυση της συνεπαγωγής

'p συνεπάγεται q':

p	**q**	**p συνεπάγεται q**
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ

Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Παρατηρούμε ότι

η πρόταση **'p συνεπάγεται q'** είναι **αληθής (A)**

αν η **p** είναι **ψευδής (Ψ)**,

ανεξάρτητα από την τιμή αλήθειας της **q**.

Δ24

Άρα, συνδυάζοντας τις δύο παρατηρήσεις,

η πρόταση

'p και όχι p συνεπάγεται q'

p και όχι p	**q**	**p και όχι p συνεπάγεται q**
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

είναι ΑΛΗΘΗΣ (Α) ανεξάρτητα από την τιμή αλήθειας της πρότασης q.

Δηλαδή

αν ένα λογικό σύστημα (ένα σύνολο δηλαδή αρχικών προτάσεων-αξιωμάτων, μαζί με όλες τις λογικές συνέπειες αυτών των αξιωμάτων) το οποίο είναι **αντιφατικό**, με την έννοια ότι περιέχει μια πρόταση της μορφής **'p και όχι p'** για κάποια πρόταση **p,**

τότε ΚΑΘΕ πρόταση q είναι συνέπεια αυτού του συστήματος,

δηλαδή το σύστημα αυτό είναι το πλέον ισχυρό από άποψη λογικών συνεπειών, αυτό δηλαδή με την μεγαλύτερη αποδεικτική δύναμη.

Ένα αντιφατικό σύστημα δηλαδή είναι ΑΠΟΛΥΤΩΣ αποτελεσματικό, καθώς έχει την δύναμη να ερμηνεύει τα πάντα !

Έτσι, σ' ένα αντιφατικό σύστημα

το 1 είναι ίσο με το 0 και επίσης το 1 είναι άνισο προς το 0,

το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές και επίσης είναι άνισο προς δύο ορθές,

κ.ο.κ.

Με αυτή όμως την έννοια ένα αντιφατικό σύστημα δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει το αληθές από το ψευδές, και έτσι στην πραγματικότητα δεν είναι σε θέση να ερμηνεύσει οτιδήποτε, σαφώς δε απορρίπτεται ως βάση για μια μαθηματική ή φυσική θεωρία.

Στα Μαθηματικά δεχόμαστε μόνο τα συστήματα εκείνα που είναι **συμβατά**, τα συστήματα δηλαδή που δεν περιέχουν τέτοιες αντιφατικές προτάσεις.

Όλα τα συστήματα που είναι συμβατά είναι αποδεκτά, ποια όμως θα προτιμήσουμε? Σαφώς τα ισχυρότερα, τα αποτελεσματικότερα, εκείνα που έχουν τις περισσότερες συνέπειες. Και ποια είναι αυτά? Οπωσδήποτε εκείνα τα οποία έχουν την δυνατότητα να δημιουργούν καταστάσεις που είναι φαινομενικά **παράδοξες** και έτσι να επιτυγχάνουν να **προσεγγίζουν** το μη αποδεκτό αλλά τελείως ισχυρό αντιφατικό σύστημα, και να αποκτούν, γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, αποδεικτική και αναπαραστατική δύναμη, **παραμένοντας** όμως τα ίδια τα συστήματα συμβατά και χωρίς εσωτερική αντίφαση (πρβλ. [N] για μια παλαιότερη περιγραφή αυτής της ιδέας). Έτσι η δημιουργία παραδόξων, μακράν από του να είναι μια ενδιαφέρουσα αλλά περιθωριακή ενασχόληση, αποκτά θεμελιώδη χαρακτήρα και αποτελεί στην πραγματικότητα τον κατ' εξοχήν τρόπο με τον οποίο οξύνεται και επεκτείνεται η ανθρώπινη σκέψη.

Η αυτό-ομοιότητα, τόσο στην αρχαία όσο και στις σύγχρονες εκδοχές της είναι ένα κορυφαίο παράδειγμα μιας τέτοιας **προσέγγισης** του αντιφατικού, παραμένοντας όμως σε συμβατά πλαίσια. Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της αυτό-ομοιότητος είναι η παραδοχή του απείρου. Με ανάλογο τρόπο τα μαθηματικά λογικά συστήματα (τόσο η αριθμητική, όσο και η γεωμετρία, η Μαθηματική ανάλυση, ιδίως δε η Θεωρία Συνόλων και η Μαθηματική Λογική, επί των οποίων θεμελιώνονται όλες οι Μαθηματικές Επιστήμες) δέχονται την έννοια του **απείρου** ως κεντρική είναι σε θέση να δημιουργούν φαινομενικά παράδοξα μέσα σε συμβατά πλαίσια, και έτσι προσεγγίζοντας το αντιφατικό, να αυξάνουν την αποδεικτική τους δύναμη, καθώς και την δύναμη τους να ερμηνεύουν τα φυσικά φαινόμενα (στα οποία βεβαίως **το άπειρο** δεν εμφανίζεται). Μια εντυπωσιακή εφαρμογή αυτής της αρχής πραγματοποιήθηκε από τον Solovay, ο οποίος επέτυχε να αποδείξει (στην εργασία του [S]) την ύπαρξη ορισμένων υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών από μια υπόθεση ύπαρξης τεραστίων συνόλων, τα οποία είχαν ισχυρή αποδεικτική δύναμη από το γεγονός ότι αποτελούσαν προσέγγιση στο αντιφατικό, σύμφωνα με το φημισμένο παράδοξο του Russell, σύνολο όλων των συνόλων.

Με αυτές τις παρατηρήσεις γίνεται κατανοητή η λογική αιτία και πηγή της «παράλογης», όπως την είχε αποκαλέσει ο Wigner, «χρησιμότητας των Μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες», ή της «ασυνήθιστης» στην Πληροφορική, αλλά και όχι μόνον, καθώς, όπως βαθμιαία διαπιστώνεται, τα Μαθηματικά έχουν στην πραγματικότητα την ίδια «παράλογη» χρησιμότητα σε κάθε επιστήμη, και για τους ίδιους λόγους.

9. [ο Bertrand Russell για τα Μαθηματικά]

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις για τη φύση και τη σημασία της μαθηματικής σκέψης θα είναι ίσως αρκετά σαφές ότι **τα Μαθηματικά δεν είναι μια τελειωμένη επιστήμη,** όπως πολλοί πιστεύουν, αλλά είναι μια επιστήμη σε πλήρη και έντονη ανάπτυξη. Από κάθε άλλη εμπειρικότερη επιστήμη συρρέουν στα Μαθηματικά αιτήματα βοήθειας. Πως μπορούν τα Μαθηματικά να βοηθήσουν στην ερμηνεία ενός νέου προβλήματος που ανακύπτει στα Οικονομικά ή στην Βιολογία ή στην Πληροφορική?

Ίσως να υπάρχουν ήδη Μαθηματικά εργαλεία τα οποία, αν εντοπισθούν με κατάλληλη αντιστοίχηση των παραμέτρων του μη-μαθηματικού προβλήματος με τα μαθηματικά εργαλεία, να είναι σε θέση να βοηθήσουν στην ορθή ερμηνεία αυτού του προβλήματος.

Όμως πολύ πιθανόν το πρόβλημα είναι νέο και τα μαθηματικά εργαλεία δεν υπάρχουν και πρέπει να αναπτυχθούν. Γι' αυτό και τα Μαθηματικά συνεχώς αναπτύσσονται και εμπλουτίζονται.

Γι' αθτό άλλωστε τα Μαθηματικά απέχουν πολύ από του να είναι ανιαρά ή τυπολατρικά ή χωρίς φαντασία ή τεχνοκρατικά, όπως πολλοί από άγνοια δυστυχώς πιστεύουν, μένοντας μόνο στο εξωτερικό κέλυφός τους. Στη *Μελέτη στα Μαθηματικά* [R], την οποία ο ίδιος ο Wigner επικαλείται στην εργασία του [W], ο μεγάλος φιλόσοφος Bertrand Russell (του οποίου το περίφημο συνολοθεωρητικό παράδοξο του 'συνόλου' όλων των συνόλων έχει άμεση σχέση με την όλη φιλοσοφία της διάλεξης αυτής) περιγράφει ωραία την αληθινή φύση των Μαθηματικών

«Τα Μαθηματικά, ορθά θεωρούμενα, κατέχουν όχι μόνο αλήθεια, αλλά υπέρτατο κάλλος, ένα κάλλος ψυχρό και αυστηρό, όπως η γλυπτική, χωρίς όμως καμιά επίκληση σε κάποια πλευρά της ασθενέστερης φύσης μας, χωρίς τη λαμπερή εξωτερική βιτρίνα της ζωγραφικής ή της μουσικής, όμως αξεπέραστα καθαρή, και ικανή για άτεγκτη τελειότητα, όπως μόνη η πιο μεγάλη τέχνη μπορεί να επιδείξει. Το αληθές πνεύμα της απόλαυσης, η ανάταση, η αίσθηση ότι είσαι κάτι ανώτερο από Άνθρωπος, αυτό που αποτελεί τη λυδία λίθο του ανώτατου επιπέδου ύπαρξης, συναντάται στα Μαθηματικά με τόση βεβαιότητα με όση και στην ποίηση.»

Βιβλιογραφία

Ευκλείδης, *Στοιχεία.*
Πλάτων, *Νόμοι*
Πλούταρχος, *Συμποσιακά*
Πρόκλος, *εις Ευκλείδην*
[F] K. von Fritz, *The Discovery of Incommensurability by Hippasos of Maetapontium*, Annals of Mathematics 46 (1945), 242-264.
[H] R. W. Hamming, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*, American Mathematical Monthly 87 (1980), 81-90.
[HHIKVV] J. Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P. G. Kolaitis, M. Vardi, and V. Vianu, *On the unusual effectiveness of logic in computer science,* The Bulletin of Symbolic Logic 7(2), (2001), 213-236.
[N] Σ. Νεγρεπόντη, *Η Διαγώνια Διαδικασία*, Θεμέλια Επιστημών Α (1979), 161-173.
[R] B. Russell, *Philosophical Essays: The Study of Mathematics,* 1910.
[S] R. Solovay, *On the cardinality of* Σ^1_2 *sets of reals*, Foundations of Mathematics (Symposium commemorating Kurt Godel, Columbus, Ohio, 1966) pp.58-73, Springer, New York, 1969.

[W] E. P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences*. Comm.Pure and Applied Math.13 (1960), 1-14.

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Πανεπιστημιούπολη, 157 84 Αθήνα
snegrep@math.uoa.gr, vfarmaki@math.uoa.gr