Η ΑΠΟΛΟΓΙΑ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ
G.H. Hardy

ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΗΔΗ ΦΑΝΕΡΟ ότι, αν θέλουμε να έχουμε οποιαδήποτε πιθανότητα να προχωρήσει η συζήτηση, οφείλω να δώσω παραδείγματα «πραγματικών» μαθηματικών θεωρημάτων θεωρήματα που ο κάθε μαθηματικός θα παραδεχτεί ότι είναι πρώτης τάξεως. Και ως προς αυτό βρίσκομαι σε' εξαιρετικά μειονεκτική θέση εξ αιτίας των περιορισμών υπό τους οποίους γράφω. Αφ' ενός μεν τα παραδείγματα μου πρέπει να είναι πολύ απλά και κατανοητά για τον αναγνώστη που δεν έχει ειδικές μαθηματικές γνώσεις. Καμιά λεπτομερής προκαταρκτική εξήγηση δεν θα πρέπει να είναι αναγκαία, και ο αναγνώστης πρέπει να είναι σε θέση να παρακολουθεί τόσο τις αποδείξεις όσο και τις διατυπώσεις. Αυτές οι συνθήκες αποκλείουν, επί παραδείγματι, πολλά από τα πιο όμορφα θεωρήματα της Αριθμοθεωρίας, όπως το θεώρημα «των δύο τετραγώνων» του Fermat ή τον νόμο των τετραγωνικών αντίστροφων. Αφ' ετέρου δε, τα παραδείγματα μου θα πρέπει να προέρχονται από τα «καθαρά» Μαθηματικά, τα μαθηματικά του εργαζόμενου επαγγελματία μαθηματικού. Και αυτή η συνθήκη αποκλείει ένα σημαντικό κομμάτι τους που θα ήταν συγκριτικά εύκολο να γίνει κατανοητό, αλλά το οποίο υπεισέρχεται στη Μαθηματική Λογική και Φιλοσοφία.

Δύσκολα μπορώ να πετύχω κάτι καλύτερο από το να επιστρέψω στους Έλληνες. Θα διατυπώσω και θα αποδείξω δύο από τα διάσημα θεωρήματα των Ελληνικών Μαθηματικών. Είναι μεν «απλά» θεωρήματα τόσο ως προς την σύλληψη όσο και ως προς την εκτέλεση, αλλά δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι είναι θεωρήματα πρώτης τάξεως. Το κάθε ένα από αυτά είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως κι όταν ανεκαλύφθη - εδώ και 2.000 χρόνια παρέμειναν ανέπαφα. Τελικά, οι διατυπώσεις και οι αποδείξεις τους μπορούν να γίνουν κτήμα ενός ευφυούς αναγνώστη μέσα σε μια ώρα, οσοδήποτε αδύνατα κι αν είναι τα μαθηματικά του εφόδια.

I. Το πρώτο είναι η απόδειξη του Ευκλείδη [1] για την ύπαρξη απείρου πλήθους πρώτων αριθμών. Οι *πρώτοι αριθμοί,* ή απλώς *πρώτοι,* είναι οι αριθμοί:

(A) 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

οι οποίοι δεν μπορούν να αναλυθούν σε γινόμενο μικρότερων παραγόντων [2]. Έτσι, ο 37 και ο 317 είναι πρώτοι. Οι πρώτοι είναι το υλικό από το οποίο κτίζονται όλοι οι αριθμοί μέσω πολλαπλασιασμού: Έτσι, $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$. Κάθε αριθμός που δεν είναι ο ίδιος πρώτος, διαιρείται τουλάχιστον από έναν πρώτο (βεβαίως, συνήθως διαιρείται από διαφόρους). Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι, δηλαδή ότι η ακολουθία (A) δεν τελειώνει ποτέ.

Ας υποθέσουμε ότι τελειώνει, και ότι 2, 3, 5,... P είναι η πλήρης ακολουθία (ώστε *ο* P *να* είναι ο μεγαλύτερος πρώτος).

Με αυτή την υπόθεση, ας θεωρήσουμε τον αριθμό Q που ορίζεται από τον τύπο:

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot P) + 1.$$

Είναι ξεκάθαρο ότι ο Q δεν διαιρείται με κανέναν από τους 2, 3, 5,... P αφού αφήνει υπόλοιπο 1. Αλλά αν ο ίδιος ο Q δεν είναι πρώτος, διαιρείται από *κάποιον* πρώτο, και επομένως υπάρχει κάποιος πρώτος (ο οποίος μπορεί να είναι ο ίδιος ο Q) μεγαλύτερος από οποιονδήποτε απ' αυτούς. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση μας ότι δεν υπάρχει πρώτος μεγαλύτερος από τον P, και άρα η υπόθεση μας είναι εσφαλμένη.

Η απόδειξη έγινε με *εις άτοπον απαγωγή,* και η εις άτοπον απαγωγή που ο Ευκλείδης αγαπούσε τόσο πολύ, είναι ένα από τα ωραιότερα όπλα του μαθηματικού." Είναι πιο όμορφο από οποιοδήποτε σκακιστικό γκαμπί.[3] Ένας σκακιστής μπορεί να θυσιάσει ένα πιόνι, ή ακόμη και ένα κομμάτι, αλλά ο μαθηματικός προσφέρει το ίδιο το *παιγνίδι.*

ΙΙ. Το δεύτερο παράδειγμα μου είναι η απόδειξη του Πυθαγόρα [4] για το ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Ένας ρητός αριθμός είναι ένα κλάσμα $\frac{a}{b}$, όπου οι *a, b* είναι ακέραιοι. Μπορεί να υποθέσουμε ότι οι *a, b* δεν έχουν κοινό παράγοντα, αφού αν είχαν θα μπορούσαμε να τον απαλείψουμε. Το να πούμε ότι ο «$\sqrt{2}$ είναι άρρητος» είναι απλώς ένας άλλος τρόπος για να πούμε ότι ο 2 δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή $(alb)^2$, το οποίο είναι το ίδιο με το να πούμε ότι η εξίσωση:

(B) $\alpha^2 = 2\beta^2$

δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από ακέραιες τιμές των *a, b* που δεν έχουν κοινό παράγοντα. Αυτό είναι ένα θεώρημα καθαρής αριθμητικής που δεν απαιτεί καμία γνώση «αρρήτων αριθμών» ούτε εξαρτάται από οποιαδήποτε θεωρία για τη φύση τους.

Το αποδεικνύουμε ξανά με *εις άτοπον απαγωγή.* Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (B) είναι αληθής και ότι *a, b* ακέραιοι χωρίς κοινό παράγοντα. Έπεται από την (B) ότι ο α^2 είναι άρτιος (αφού ο $2b^2$ διαιρείται με το 2), και άρα ο *α* είναι άρτιος (αφού το τετράγωνο ενός περιττού είναι περιττός). Αν ο α είναι άρτιος, τότε

(C) $a = 2c$

για κάποιον ακέραιο *c* Και επομένως $2b^2=a^2=(2c)^2=4c^2$ *ή*

(D) $b^2=2c^2$

Άρα ο b^2 είναι άρτιος και επομένως (για τους ίδιους λόγους όπως πριν) ο *b* είναι άρτιος. Αυτό θα πει ότι ο *α* και ο *b* είναι και οι δύο άρτιοι και έτσι έχουν κοινό παράγοντα το 2, πράγμα που αντιφάσκει προς την υπόθεση μας και επομένως η υπόθεση μας είναι ψευδής.

Από το θεώρημα του Πυθαγόρα έπεται ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρος προς την πλευρά (ότι ο λόγος τους δεν είναι ρητός αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει μονάδα μήκους της οποίας η πλευρά και η διαγώνιος να είναι ακέραια πολλαπλάσια). Αυτό συμβαίνει επειδή, αν πάρουμε την πλευρά του ως μονάδα μήκους και το μήκος της διαγωνίου είναι *d,* τότε από ένα πολύ οικείο θεώρημα το οποίο επίσης αποδίδεται στον Πυθαγόρα [5],

$$d^2= 1^2 + 1^2=2$$

και άρα ο *d* δεν μπορεί να είναι ρητός.

Θα μπορούσα να αναφέρω οσαδήποτε θαυμάσια θεωρήματα από την Αριθμοθεωρία, των οποίων το νόημα ήταν σε θέση να καταλάβει ο καθένας. Για παράδειγμα, υπάρχει το αποκαλούμενο «Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής» που λέει ότι οποιοσδήποτε ακέραιος μπορεί να αναλυθεί, κατά *έναν και μόνο τρόπο,* σε γινόμενο πρώτων. Έτσι, $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ και δεν υπάρχει άλλη ανάλυση. Είναι αδύνατον $666 = 2 \cdot 11 \cdot 29$ ή $13 \cdot 89 = 17 \cdot 73$ (και μπορούμε να το δούμε χωρίς να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό). Αυτό το θεώρημα, όπως το συμπεραίνει κανείς κι από το όνομα του, είναι το θεμέλιο της ανωτέρας αριθμητικής. Αλλά η απόδειξη, αν και δεν είναι «δύσκολη», απαιτεί μια κάπως εκτεταμένη εισαγωγή και μπορεί να θεωρηθεί βασανιστική για κάποιον μη μαθηματικό αναγνώστη.

Ένα άλλο περίφημο και όμορφο θεώρημα είναι το «Θεώρημα των δύο τετραγώνων» του Fermat. Οι πρώτοι (αν αγνοηθεί η ειδική περίπτωση του 2) μπορεί να διαταχθούν σε δύο κατηγορίες: στους πρώτους

$$5,13,17,29,37,41,...$$

οι οποίοι αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 4, και στους πρώτους

3,7,11,19,23,31,... οι οποίοι αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με το 4.

Όλοι οι πρώτοι της πρώτης κατηγορίας, και κανένας της δεύτερης, μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων. Έτσι,

$$5 = 1^2 + 2^2, \qquad 13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 1^2 + 4^2, \qquad 29 = 2^2 + 5^2.$$

Αλλά, ο 3, ο 7, ο 11 και ο 19 δεν μπορούν να εκφραστούν με αυτό τον τρόπο (όπως μπορεί να ελέγξει ο αναγνώστης με δοκιμές). Αυτό είναι το θεώρημα του Fermat, το οποίο κατατάσσεται, και δίκαια, στα ωραιότερα της Αριθμητικής. Δυστυχώς, δεν υπάρχει απόδειξη στα πλαίσια της αντίληψης οποιουδήποτε δεν είναι αρκετά έμπειρος μαθηματικός.

Υπάρχουν επίσης όμορφα θεωρήματα στη Συνολοθεωρία, όπως το θεώρημα του Cantor για την «μη αριθμησιμότητα» του συνεχούς. Εδώ ακριβώς υπάρχει η αντίστροφη δυσκολία. Η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη, όταν κάποιος κατέχει την μαθηματική γλώσσα, αλλά είναι αναγκαίες πολλές επεξηγήσεις πριν το *νόημα* του θεωρήματος γίνει καθαρό. Γι' αυτό και δεν θα προσπαθήσω να δώσω περισσότερα παραδείγματα. Αυτά που έδωσα είναι ενδεικτικά, και ένας αναγνώστης που δεν μπορεί να τα εκτιμήσει, είναι απίθανο να εκτιμήσει ο,τιδήποτε στα Μαθηματικά.

Είπα ότι ένας μαθηματικός είναι κατασκευαστής σχεδιασμάτων από ιδέες, και ότι η ομορφιά και η σοβαρότητα είναι τα κριτήρια με τα οποία τα σχεδιάσματα του θα έπρεπε να κριθούν. Δεν μπορώ να πιστέψω πως οποιοσδήποτε κατάλαβε τα δύο θεωρήματα που έφερα ως παραδείγματα, θα αμφισβητήσει ότι ικανοποιούν αυτά τα κριτήρια. Αν συγκρίνουμε τα δύο παραδείγματα με τις πιο έξυπνες σπαζοκεφαλιές του Dudeney, ή με τα καλύτερα σκακιστικά προβλήματα που οι μαιτρ του είδους έχουν συνθέσει, η ανωτερότητα τους και ως προς τις δύο πλευρές είναι εμφανής: υπάρχει μια σαφέστατη διαφορά επιπέδου. Είναι πολύ πιο σοβαρά και επίσης πολύ πιο όμορφα. Μπορούμε, άραγε, κοιτώντας τα προσεκτικότερα, να καθορίσουμε πού έγκειται η ανωτερότητα τους;

ΚΑΤ' ΑΡΧΗΝ, Η ΑΝΩΤΕΡΟΤΗΤΑ των μαθηματικών θεωρημάτων ως προς την *σοβαρότητα* είναι προφανής και συντριπτική. Το σκακιστικό πρόβλημα είναι το προϊόν ενός ιδιοφυούς αλλά πολύ περιορισμένου πλέγματος ιδεών, οι οποίες δεν διαφέρουν ουσιαστικά από το ένα πρόβλημα στο άλλο και ούτε έχουν εξωτερικές επιπτώσεις. Θα σκεφτόμασταν με ακριβώς τον ίδιο τρόπο ακόμη κι αν το σκάκι δεν είχε εφευρεθεί ποτέ, ενώ τα θεωρήματα του Ευκλείδη και του Πυθαγόρα έχουν επηρεάσει βαθιά την σκέψη, και μάλιστα έξω από τον κύκλο των Μαθηματικών.

Έτσι, το θεώρημα του Ευκλείδη είναι ζωτικής σημασίας για όλη την δομή της Αριθμητικής. Οι πρώτοι αριθμοί είναι το αρχικό υλικό με το οποίο έχουμε οικοδομήσει την αριθμητική, και το θεώρημα του Ευκλείδη μάς εξασφαλίζει ότι έχουμε άφθονο υλικό γι' αυτό το σκοπό. Το θεώρημα του Πυθαγόρα όμως έχει ευρύτερες εφαρμογές και προσφέρεται για μια καλύτερη παρουσίαση.

Πρέπει να παρατηρήσουμε, κατ' αρχάς, ότι ο συλλογισμός μπορεί να επεκταθεί κατά πολύ, και μπορεί να εφαρμοστεί -με μικρή αλλαγή στην βάση του- σε ευρύτατες κατηγορίες «αρρήτων». Με όμοιο τρόπο, είναι δυνατόν να αποδείξουμε (όπως φαίνεται ότι το έκανε ο Θεόδωρος) ότι οι:

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$$

είναι άρρητοι, ή (πηγαίνοντας πιο πέρα κι απ' τον Θεόδωρο) ότι ο $\sqrt[3]{2}$ και ο $\sqrt[3]{17}$ είναι άρρητοι. [6] Το Θεώρημα του Ευκλείδη μας λέει ότι έχουμε ένα ικανό απόθεμα υλικού για την κατασκευή μιας συγκροτημένης αριθμητικής των ακεραίων αριθμών. Το Θεώρημα του Πυθαγόρα και οι επεκτάσεις του μας λένε ότι, άπαξ και κατασκευάσθηκε αυτή η αριθμητική, δεν θα αποδειχτεί αρκετή για τις ανάγκες μας, αφού υπάρχουν πολλά μεγέθη τα οποία μας επιβάλλουν την παρουσία τους και τα οποία αυτή η αριθμητική είναι ανήμπορη να μετρήσει: η διαγώνιος του τετραγώνου είναι απλώς το πιο προφανές παράδειγμα. Η μεγάλη σπουδαιότητα αυτής της ανακάλυψης αναγνωρίστηκε αμέσως από τους Έλληνες μαθηματικούς. Είχαν ξεκινήσει με την υπόθεση ότι (σε συμφωνία, υποθέτω, με τις «φυσικές» επιταγές της «κοινής λογικής») όλα τα μεγέθη του ίδιου είδους είναι σύμμετρα (ότι για παράδειγμα, δύο οποιαδήποτε μήκη είναι πολλαπλάσια κάποιας κοινής μονάδας μήκους), και είχαν κατασκευάσει μια θεωρία αναλογιών στηριγμένη σ' αυτή την υπόθεση. Η ανακάλυψη του Πυθαγόρα κατέδειξε το μη στέρεο της θεμελίωσης αυτής και οδήγησε στην κατασκευή της πολύ βαθύτερης θεωρίας του Ευδόξου που εκτίθεται στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων και που θεωρείται από πολλούς σύγχρονους μαθηματικούς ως το εξέχον επίτευγμα των ελληνικών Μαθηματικών. Αυτή η θεωρία είναι εκπληκτικά σύγχρονη στο πνεύμα της, και μπορεί να θεωρηθεί ως η απαρχή της σημερινής θεωρίας των αρρήτων αριθμών που έφερε επανάσταση στη Μαθηματική Ανάλυση και είχε μεγάλη επίδραση στη φιλοσοφία του καιρού μας.

Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία, επομένως, ως προς τη «σοβαρότητα» και των δύο θεωρημάτων. Κατά συνέπεια, αξίζει περισσότερο απ' όλα να σημειώσουμε ότι κανένα απ' αυτά δεν έχει την παραμικρή πρακτική σπουδαιότητα. Στις πρακτικές εφαρμογές ασχολούμαστε μόνο με μικρούς συγκριτικά αριθμούς μόνο η Αστρονομία και η Ατομική Φυσική ασχολούνται με μεγάλους αριθμούς και αυτές, επί τους παρόντος, έχουν πολύ μικρή πρακτική σημασία σε σχέση με τα αφηρημένα και περισσότερο καθαρά Μαθηματικά.36 Δεν γνωρίζω ποιος είναι ο πλέον μεγάλος βαθμός ακριβείας που χρησίμευσε ποτέ σ' έναν μηχανικό - θα είμαστε πολύ γενναιόδωροι αν πούμε έως το δέκατο δεκαδικό ψηφίο. Τώρα, ο

$$3{,}141592653$$

(που είναι η τιμή του π μέχρι το ένατο δεκαδικό ψηφίο) είναι το πηλίκον:

$$\frac{3141592653}{1000000000}$$

δύο αριθμών με δέκα ψηφία. Το πλήθος των πρώτων αριθμών μέχρι το 1000000000 είναι 50847478 : αυτό είναι αρκετό για έναν μηχανικό ο οποίος μπορεί να αισθάνεται απολύτως ευτυχής χωρίς τους υπόλοιπους πρώτους.

Αυτά όσον αφορά στο Θεώρημα του Ευκλείδη· σε σχέση με εκείνο του Πυθαγόρα, είναι προφανές ότι οι άρρητοι δεν ενδιαφέρουν έναν μηχανικό, αφού αυτός ενδιαφέρεται μόνο για προσεγγίσεις και αφού όλες οι προσεγγίσεις είναι ρητές.

---

1. *Στοιχεία* IX 20. Η πραγματική προέλευση πολλών θεωρημάτων *των Στοιχείων* είναι ομιχλώδης, αλλά δεν υπάρχει κανένας ιδιαίτερος λόγος να υποθέσουμε ότι δεν είναι του ίδιου του Ευκλείδη.
2. Υπάρχουν τεχνικοί λόγοι για τους οποίους δεν μετράμε τον 1 ως πρώτοι. Η απόδειξη μπορεί να διευθετηθεί κατά τέτοιον τρόπο ώστε να αποφεύγει την απαγωγή, και οι Λογικοί ορισμένων σχολών θα το προτιμούσαν έτσι.
3. Γκαμπί: σκακιστικός όρος για τη θυσία κομματιού που επιφέρει εντούτοις πλεονέκτημα.
4. Παραδοσιακά, η απόδειξη αποδίδεται στον Πυθαγόρα και σίγουρα είναι προϊόν της σχολής του. Το θεώρημα εμφανίζεται σε μια πολύ πιο γενική μορφή στον Ευκλείδη (Στοιχεία X, 9).
5. Ευκλείδης, Στοιχεία 147.
6. Βλέπε Κεφ. IV των Hardy και Wright, Introduction to the Theory of Numbers {Εισαγωγή στη Θεωρία των Αριθμών), όπου υπάρχουν συζητήσεις γα διάφορες γενικεύσεις του συλλογισμοί του Πυθαγόρα, και ένας ιστορικός γρίφος για τον Θεόδωρο.