

Δραστηριότητα με πρώτους αριθμούς

Δίνεται ένας πρώτος αριθμός p . Πόσα ζευγάρια ακεραίων αριθμών (x, y) υπάρχουν, τέτοια ώστε ο αριθμός $A = y^2 - x^3 - x$ να διαιρείται ακριβώς δια p ;

A. Θα ασχοληθούμε πρώτα με τη περίπτωση $p=3$

Ζητάμε τα ζεύγη των ακεραίων αριθμών (x, y) , τέτοια ώστε ο αριθμός $A = y^2 - x^3 - x$ να διαιρείται ακριβώς δια 3.

1. Βεβαιωθείτε ότι το ζεύγος $(x, y) = (2, 1)$ ικανοποιεί την προϋπόθεση ενώ το ζεύγος $(1, 2)$ δεν την ικανοποιεί.

.....
.....
.....
.....

2. Δείξτε ότι κάθε αριθμός x που αφήνει υπόλοιπο 2 στη διαίρεσή του με το 3 και κάθε αριθμός y που αφήνει υπόλοιπο 1 στη διαίρεσή του με το 3 ικανοποιούν την προϋπόθεση.

Αφού η διαίρεση x δια 3 αφήνει υπόλοιπο 2 ο x γράφεται ως $x = 3k+2$ με k ακέραιο.

Ομοίως $y =$

Άρα A

=
.....
.....
.....
.....
.....

3. Δείξτε ότι ο $A = y^2 - x^3 - x$ διαιρείται ακριβώς δια 3 αν και μόνο αν ο αριθμός $B = \varphi^2 - \psi^3 - \psi$ διαιρείται ακριβώς δια 3. (ψ και φ είναι αντίστοιχα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των x και y δια 3).

$x = 3k + \psi$ και $y =$

Άρα $A = y^2 - x^3 - x$

=
.....
.....
.....

.....

 4. Άρα υπάρχουν άπειρα ζευγάρια (x, y) που ικανοποιούν την προϋπόθεση και που το καθένα τους αντιστοιχεί σ' ένα ζευγάρι της μορφής (u, φ) με $0 \leq u < 3$ και $0 \leq \varphi < 3$. Τα ζευγάρια της μορφής (u, φ) με $0 \leq u < 3$ και $0 \leq \varphi < 3$ που ικανοποιούν την προϋπόθεση θα ονομάζονται **πρωταρχικά ζεύγη**.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να έχει νόημα το πρόβλημα θα πρέπει να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

.....

 5. Συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα και εντοπίστε όλα τα πρωταρχικά ζεύγη που ικανοποιούν την προϋπόθεση. Καθώς τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης δια 3 είναι 0,1,2 υπάρχουν 9 δυνατοί συνδυασμοί για το u και το φ .

u	φ	$\varphi^2 - u^3 - u$	Ικανοποιεί την προϋπόθεση;
0	0		
0	1		
0	2		
1	0		
1	1		
1	2		

Άρα υπάρχουν πρωταρχικά ζεύγη που ικανοποιούν την προϋπόθεση. Είναι τα:

.....

B. Η ίδια απόδειξη που κάναμε στο A3 γενικεύεται για οποιονδήποτε πρώτο αριθμό p:

Ο $A = y^2 - x^3 - x$ διαιρείται ακριβώς δια 3 αν και μόνο αν ο $B = \varphi^2 - \psi^3 - \psi$ διαιρείται ακριβώς δια p. (u και φ τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των δια p).

$$x = p\kappa + \psi \quad \text{και} \quad y = \dots\dots\dots$$

$$\text{Άρα } A = y^2 - x^3 - x$$

=

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Γ. Πόσα πρωταρχικά ζεύγη υπάρχουν στην περίπτωση p=5 και πόσα στην περίπτωση p=7; (Υπόδειξη: Επειδή οι οι συνδυασμοί είναι πολλοί – 25 στην περίπτωση p=5 και 49 στην περίπτωση p=7 θα πρέπει να κάνετε μερικές συντομεύσεις. Εξετάστε πρώτα ποιες τιμές μπορεί να πάρει το υπόλοιπο των διαιρέσεων του y^2 και του x^3+x όταν διαιρείται με το p).