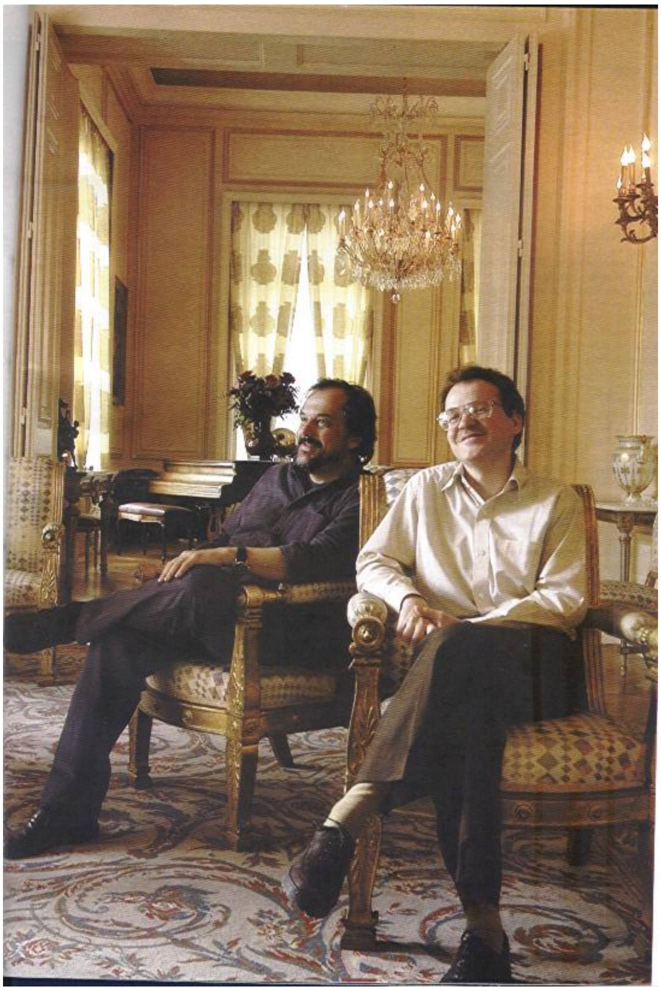
Μια συζήτηση
ανάμεσα στον Λωράν Λαφόργκ και τον Απόστολο Δοξιάδη
για τα μαθηματικά, τη λογοτεχνία, και μερικά ακόμη



Φωτογραφία: Παύλος Φυσάκης

Τον περασμένο Μάρτιο, ο Laurent Lafforgue, μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας των επιστημών και κάτοχος του βραβείου Φιλντς – της υψηλότερης διάκρισης για μαθηματικούς επισκέφθηκε την Ελλάδα, προσκεκλημένος του Γαλλικού Ινστιτούτου και του Μεγάρου Μουσικής. Στα πλαίσια της επίσκεψής του, το Γαλλικό Ινστιτούτο οργάνωσε μια συζήτηση ανάμεσα στον Lafforgue και τον Απόστολο Δοξιάδη πάνω στα μαθηματικά, τη λογοτεχνία, την εκπαίδευση, την έρευνα... Ένα μέρος της συζήτησης δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Popular Science της Καθημερινής, στο τεύχος της 1ης Απριλίου 2005. Δημοσιεύουμε εδώ το πλήρες απομαγνητοφωνημένο κείμενο της συζήτησης.

ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΟΞΙΑΔΗΣ: Να ξεκινήσω με μια παράδοξη ερώτηση, που μου την προκάλεσε η διάλεξή σας στο Μέγαρο Μουσικής: τί μπορεί να διδάξει ο Balzac σε έναν μαθηματικό;

ΛΩΡΑΝ ΛΑΦΟΡΓΚ: Δεν ξέρω αν ο Balzac μπορεί να διδάξει κάτι σε όλους τους μαθηματικούς. Προσωπικά, δεν επηρεάστηκα από το έργο του μόνο ως μαθηματικός αλλά και ως άνθρωπος. Διάβασα για πρώτη φορά την *Ανθρώπινη Κωμωδία*, έργο πολλών χιλιάδων σελίδων, όταν ήμουν 15 χρονών. Το έργο αυτό διαμόρφωσε την προσωπικότητά μου και μου δίδαξε τη συστηματική εργασία και προσέγγιση των προβλημάτων. Ο Balzac περιγράφει την κοινωνική διαστρωμάτωση στη Γαλλία του Εκατονταετούς Πολέμου με τρόπο συστηματικό, σχεδόν επιστημονικό. Το έργο του είναι κατά μία έννοια κοινωνιολογικό. Μάλιστα, ο συγγραφέας δείχνει να έχει πιο διεισδυτικό μάτι από πολλούς κοινωνιολόγους. Παρατηρεί τα διάφορα κοινωνικά στρώματα, τις κοινωνικές τάξεις, και δεν στέκεται στην περιγραφή καθεμίας ξεχωριστά, αλλά μιλά και για τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Αυτού του είδους η προσέγγιση επηρέασε τον τρόπο σκέψης μου και στα μαθηματικά. Εκτιμώ ιδιαίτερα τους μαθηματικούς που θέτουν σαν στόχο τους τη συστηματική και εξαντλητική μελέτη ενός ορισμένου τομέα. Την έμπνευσή μου για αυτό αποτέλεσαν και οι χαρακτήρες του Balzac, πρόσωπα με ακλόνητη θέληση, με ισχυρή προσωπικότητα που κυνηγούν μακρινούς στόχους και δε σταματούν ποτέ τον αγώνα τους. Όταν κανείς διαβάσει και ξαναδιαβάσει τον Balzac, συνειδητοποιεί το μεγαλείο του έργου του και μια εργασία εκατό σελίδων στα μαθηματικά φαίνεται ασήμαντη. Μου αρέσουν τα δύσκολα προβλήματα, αυτά που απαιτούν αφοσίωση και υπομονή.

ΑΔ: Η ενασχόληση με τα μαθηματικά ήρθε μετά τη λογοτεχνία;

ΛΛ: Η κλίση μου στα μαθηματικά φάνηκε από την εφηβεία μου, το μάθημα στο σχολείο μου φαινόταν πολύ εύκολο. Δεν μπορώ να πω, όμως, πως με ενδιέφεραν τα μαθηματικά τόσο όσο η λογοτεχνία, αρχικά. Στο σχολείο περνούσα μεγάλο μέρος του χρόνου μου διαβάζοντας λογοτεχνικά βιβλία, κατά κύριο λόγο Balzac. Αυτό μέχρι τα είκοσί μου χρόνια, συγκεκριμένα μέχρι το δεύτερο έτος στο πανεπιστήμιο, την École Normale Supérieure, οπότε και ανακάλυψα το έργο του Alexandre Grothendieck. Αφιέρωσα αρκετά χρόνια στη μελέτη του μεγάλου συγγράμματός του *Στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας.* Πιστεύω πως ο λόγος που το έργο του Grothendieck με συνεπήρε τόσο είναι τον θεώρησα αμέσως το αντίστοιχο του Balzac στα μαθηματικά.

ΑΔ: (Όταν φτάνει ο καφές που παρήγγειλε.) Ο καφές μου θυμίζει πάλι τον Balzac, όσο και τον μεγάλο μαθηματικό Paul Erdös, που κατανάλωναν κι οι δυο μεγάλες ποσότητες καφέ, για να μπορούν να εργάζονται συνεχώς. Ο Balzac συγκεκριμένα έπινε ατελείωτους καφέδες προκειμένου να μένει ξύπνιος για είκοσι ώρες την ημέρα και να γράφει.

ΛΛ: Ναι, βέβαια. Στο βιβλίο σας *Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ* αναφέρετε αν δεν κάνω λάθος την περίφημη φράση του Erdös ότι «ο μαθηματικός είναι μια μηχανή που καταναλώνει καφέ και παράγει θεωρήματα». Εγώ, όμως, όπως βλέπετε, αποτελώ εξαίρεση. Δεν συνηθίζω να πίνω καφέ. Μάλλον είμαι ιδιαίτερη περίπτωση.

ΑΔ: Κάποιος είπε σχετικά με τον Grothendieck τα εξής: «Οι περισσότεροι μαθηματικοί θα προσπαθούσαν να απλοποιήσουν μία απόδειξη εκατό σελίδων γράφοντας ένα άρθρο είκοσι σελίδων. Ο Grothendieck, όμως, έπαιρνε μια λύση εκατό σελίδων και την απλοποιούσε σε εξακόσιες σελίδες».

ΛΛ: Θεωρώ τον Grothendieck πραγματικά συναρπαστική προσωπικότητα. Δεν τον έχω συναντήσει ποτέ.

ΑΔ: Εγώ τον έχω συναντήσει δυο φορές.

ΛΛ: Ανήκω σε μια γενιά που δεν είχε αυτή την τύχη καθώς όταν σπούδαζα, ο Grothendieck είχε πια εξαφανιστεί, τουλάχιστον από τους κύκλους των μαθηματικών. Μελέτησα, όμως, για χρόνια το έργο του και συνεχίζω να τον θαυμάζω περισσότερο από κάθε άλλο σύγχρονο μαθηματικό. Όπως είπα και προηγουμένως, θεωρώ ότι ο Grothendieck μοιάζει με τον Balzac. Πήρε ένα θέμα, την αλγεβρική γεωμετρία, και προσπάθησε να το μελετήσει με συστηματικό τρόπο. Το έργο του ήταν μια έκπληξη για μένα. Η πρώτη ανάγνωση ήταν δύσκολη καθώς τα *Στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας* δεν περιέχουν παραδείγματα. Το κείμενο είναι πολύ αφηρημένο γι αυτό και για την κατανόησή του απαιτείται τεράστια συγκέντρωση. Ταυτόχρονα, όμως, είναι τόσο δυνατό όσο το έργο του Balzac. Αυτό που με εντυπωσίασε επίσης ήταν ότι ενώ όλα όσα διάβαζα στον Grothendieck μου φαίνονταν εντελώς άγνωστα, είχα την εντύπωση πως κάθε γραμμή του κειμένου ήταν μια αφορμή να φέρω στην επιφάνεια γνώσεις που είχα μέσα μου, η τέλεια εφαρμογή της «μαιευτικής μεθόδου» του Σωκράτη, για με την οποία ο Πλάτωνας δίνει ένα παράδειγμα από τα μαθηματικά. Αν θυμάμαι καλά, ρωτά ένα νέο αγόρι να αποδείξει το θεώρημα του Πυθαγόρα ή μάλλον το άρρητο της τετραγωνικής ρίζας του 2. Παροτρύνει το αγόρι να σκεφτεί και στην ουσία να ανακαλύψει μόνο του την απάντηση καθοδηγούμενο από την ερώτηση. Αυτό που λέει ο Σωκράτης είναι ότι το αγόρι έφερε την απάντηση μέσα του. Την ίδια εντύπωση δίνει στους μαθηματικούς η ανάγνωση του Grothendieck. Στις εκατοντάδες σελίδες του έργου του, ο Grothendieck γράφει πράγματα που, μόλις ειπωθούν, φαίνονται αυτονόητα. Είναι πράγματι περίεργο. Στην πρώτη ανάγνωση κανείς χάνεται μέσα σε ένα πέλαγος νέων ιδεών. Δημιουργείται στον αναγνώστη η εντύπωση ότι το κείμενο είναι απρόσιτο. Σιγά-σιγά, όμως, εξοικειώνεται με τα νοήματα κι έπειτα από λίγο όλα του φαίνονται αυτονόητα. Φανταστείτε να ανακαλύπτατε ξαφνικά μια γλώσσα που την γνωρίζατε καλά αλλά ήταν κρυμμένη μέσα σας.

ΑΔ: Κάτι σαν την εμπειρία ότι κάτι το έχουμε ξαναδεί, ξαναζήσει, το λεγόμενο déjà vu;

ΛΛ: Ακριβώς. Μόνο που στην περίπτωση του Grothendieck δεν το παθαίνεις αμέσως, αλλά έπειτα από μερικές εβδομάδες ή μερικούς μήνες, όταν αρχίσεις να αφομοιώνεις το κείμενο. Σου δημιουργείται η εντύπωση ότι τα γνώριζες όλα αυτά από πριν.

ΑΔ: Όπως ξέρουμε, υπάρχουν πολλές τάσεις στη φιλοσοφία των μαθηματικών, πολλές απαντήσεις στο ερώτημα του τι είναι η μαθηματική αλήθεια. Η κυρίαρχη, βέβαια, είναι η πλατωνική, σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές αλήθειες προϋπάρχουν. Εσείς το πιστεύετε αυτό;

ΛΛ: Όλοι σχεδόν οι μαθηματικοί θεωρούν εαυτούς πλατωνικούς. Είναι βέβαιο.

ΑΔ: Πιστεύετε, λοιπόν, ότι οι μαθηματικές αλήθειες προϋπάρχουν;

ΛΛ: Ναι.

ΑΔ: Όλες;

ΛΛ: Όχι, δεν θα έλεγα όλες. Στα μαθηματικά υπάρχουν έννοιες που συνδέονται με την ιστορία, με την προσωπικότητα των ανθρώπων που τις κατασκεύασαν. Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα που σιγά-σιγά τελειοποιείται, εξελίσσεται. Κατά τη διαδικασία αυτή δανείζεται λέξεις από το τρέχον λεξιλόγιο, λέξεις που είναι πρόσθετες. Παρόλα αυτά, θα λέγαμε ότι τα καλύτερα μαθηματικά είναι αυτά που δίνουν πάντα την εντύπωση στον επιστήμονα ότι ανακαλύπτει πράγματα που προϋπήρχαν. Όσο δυνατότερο είναι ένα μαθηματικό κείμενο, τόσο ισχυρότερη είναι η εντύπωση που δημιουργείται στον αναγνώστη ότι ανακαλύπτει ιδέες που τον περίμεναν να τις ανακαλύψει, ιδέες σαν αυτές που περιγράφει ο Πλάτωνας.

ΑΔ: Νομίζω πως την αίσθηση αυτή τη δημιουργεί σε κάποιο βαθμό καθετί όμορφο και αρμονικό όπως ένα σπουδαίο έργο τέχνης, για παράδειγμα η Πέμπτη Συμφωνία του Μπετόβεν ή ο Βασιλιάς Ληρ του Σαίξπηρ.

ΛΛ: Συμφωνώ. Πιστεύω, όμως, πως στα μαθηματικά η έννοια της προϋπάρχουσας ιδέας ισχύει περισσότερο από ότι στην περίπτωση των έργων τέχνης. Ένα ολοκληρωμένο έργο τέχνης δίνει όντως την εντύπωση ότι ο καλλιτέχνης εκφράζει κάτι που δεν σχετίζεται με τον ίδιο, που τον ξεπερνά. Γι αυτό και ο υπόλοιπος κόσμος μπορεί να εκτιμήσει τη δουλειά του τόσο πολύ. Το θέμα του έργου τέχνης, όμως, έχει επιλεγεί από το δημιουργό του. Κατά συνέπεια, θεωρώ ότι στην τέχνη υπάρχει περισσότερη εξάρτηση από τον άνθρωπο από ότι στα μαθηματικά. Πέρα από όλα αυτά, όμως, θα ήθελα να σημειώσω ότι τα μαθηματικά είναι η μόνη ανθρώπινη δραστηριότητα που διέπεται από αυστηρότατους κανόνες, όπως ο απόλυτος κανόνας του να μιλά κανείς μόνο για βέβαιες αλήθειες και το να καταλήγει μόνο σε λογικά συμπεράσματα ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης. Τα μαθηματικά είναι ταυτόχρονα τέχνη και επιστήμη. Ίσως, μάλιστα, να είναι περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη. Από τις τέχνες, όμως, είναι αυτή που έχει τους πιο αυστηρούς κανόνες. Γι αυτό και στην ομιλία μου αναφέρθηκα στη φράση του Maxim Kontsevich ότι «τα μαθηματικά είναι η τελευταία κλασική τέχνη». Θεωρώ ότι σε αυτή τη φράση το επίθετο «κλασικός» είναι τόσο σημαντικό όσο το ουσιαστικό «τέχνη». Αυτό που διακρίνει τον κλασικισμό τόσο της εποχής του Περικλή όσο και του 17^{ου} αιώνα είναι η ύπαρξη ακριβώς πολύ αυστηρών κανόνων, στα πλαίσια των οποίων, όμως, υπάρχει χώρος να αναπτυχθεί η ανθρώπινη δημιουργικότητα. Κατά κάποιο τρόπο, τα μαθηματικά δεν είναι μόνο η τελευταία κλασική τέχνη, αλλά ίσως η πιο κλασική από όλες τις τέχνες, καθώς ενώ διέπεται από τους αυστηρότερους κανόνες, επιτρέπει τη ανάπτυξη της δημιουργικότητας.

ΑΔ: Όταν μιλούσατε για τον σπουδαίο γάλλο μαθηματικό Jean-Pierre Serre στην ομιλία σας, είπατε ότι στο έργο του Serre δεν υπάρχει ούτε ένας πλεονασμός, ότι καμία λέξη δεν είναι περιττή, αλλά και δεν λείπει ούτε μια λέξη. Η φράση αυτή, κατά τη γνώμη μου, περιγράφει επακριβώς το κλασικό στυλ. Με αυτή την έννοια, ο Balzac δεν είναι κλασικός.

ΛΛ: Ο Jean-Pierre Serre είναι το αρχέτυπο του κλασικού μαθηματικού, κλασικού ως προς το ότι σέβεται τους μορφολογικούς κανόνες. Η τελειότητα της γραφής του είναι αξιοσημείωτη. Όπως είπα και στην ομιλία μου, ο Serre θα μπορούσε να θεωρηθεί πρότυπο σωστής σύνταξης. Θα λέγαμε ότι είναι συνεχιστής των κλασικών συγγραφέων του 17^{ου} αιώνα. Το γεγονός αυτό, βέβαια, οφείλεται στο ότι ο Serre φοίτησε σε ένα σχολείο που του δίδαξε την κλασική γαλλική γλώσσα. Ο Grothendieck, αντίθετα, γεννήθηκε στη Γερμανία από Ρώσο πατέρα και έφθασε στη Γαλλία στα δέκα του χρόνια. Το στυλ της γραφής του, λοιπόν, δεν είναι σε καμία περίπτωση κλασικό. Ούτε και του Balzac είναι, μιας και ο συγγραφέας αυτός δεν ζητά να συντάξει την τέλεια φράση. Εγώ, όμως, αντιλαμβάνομαι τον κλασικό χαρακτήρα των Balzac και Grothendieck διαφορετικά. Και οι δύο είναι κλασικοί διότι ακολουθούν κανόνες – διαφορετικούς κανόνες, αλλά κανόνες. Ο Balzac δεν είναι κλασικός στις λεπτομέρειες κάθε φράσης. Είναι κλασικός όσον αφορά το έργο στο σύνολό του, είναι κλασικός στη σύνθεση. Και ο Grothendieck είναι κλασικός στη σύνθεση.

ΑΔ: Θα μπορούσαμε να μιλάμε για ώρες για τον κλασικισμό στη λογοτεχνία, αλλά πρέπει λίγο να επιστρέψουμε στα μαθηματικά. Στην ομιλία σας είπατε ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχουν επαναστάσεις. Αν και δεν αισθάνομαι ιδιαίτερη σχέση με τη σημειολογία, θα αναφερθώ, περισσότερο για να σας προκαλέσω, στον ψυχαναλυτή Lacan και στη φράση του «το σημαίνον είναι πάνω από το σημαινόμενο». Συμφωνώ ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχουν επαναστάσεις στο επίπεδο του σημαινόμενου, η αλήθεια σε κάποιο επίπεδο είναι μία και δεν αλλάζει. Όμως γίνονται αλλαγές στο επίπεδο του σημαίνοντος, της γλώσσας που εκφράζει την αλήθεια. Και ο Grothendieck εφηύρε μια νέα γλώσσα, που εξέφραζε νέες ιδέες.

ΛΛ: Κάτι πολύ σπουδαίο στα μαθηματικά είναι ότι στην ουσία τα παλιά προβλήματα δεν εγκαταλείπονται. Ακόμα κι αν το παλιό πρόβλημα λυθεί, η λογική των μαθηματικών υπαγορεύει την περαιτέρω εμβάθυνση στο ερώτημα που θέτει. Η εμβάθυνση γίνεται σε διαδοχικά στάδια, στο καθένα από τα οποία διαπιστώνουμε ότι η άποψη που είχαμε μέχρι πρότινος ήταν μερική και προσθέτουμε έτσι μια νέα διάσταση. Το πρόβλημα της Αντιστοιχίας του Langlands, για το οποία μίλησα (*Σημείωση: είναι το πρόβλημα για τη λύση του οποίου ο Λαφόργκ τιμήθηκε το Μετάλλιο Φηλντς, το «Νόμπελ των μαθηματικών» όπως αποκαλείται.)* για παράδειγμα, εξελίσσει τον Νόμο της Τετραγωνικής αντιστρεψιμότητας του Όιλερ(law of quadratic reciprocity). Εμείς ξεκινήσαμε από αυτό το σημείο και προσθέσαμε μια επιπλέον διάσταση. Ελπίζουμε ότι πάντα θα μπορούμε να προσθέτουμε νέες διαστάσεις, γιατί κάθε φορά που προστίθεται μια νέα διάσταση, οι ελλείψεις της προηγούμενης άποψης γίνονται εμφανέστερες. Δεν θα πρέπει όμως να ξεχνάμε τη σημασία του σημείου εκκίνησης, του αρχικού προβλήματος. Κάτι που έχει αποδειχθεί, στα μαθηματικά, δεν αλλάζει βέβαια ποτέ, δεν υπάρχει αποδεδειγμένη αλήθεια που ξαφνικά μια μέρα παύει να ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα την Ευκλείδεια γεωμετρία την οποία διδασκόμαστε ακόμα στο σχολείο. Όχι μόνο τη διδασκόμαστε στο σχολείο, αλλά πρέπει να ξεκινήσουμε από αυτή για να περάσουμε στη γεωμετρία του Ρίμαν. Δεν έχει νόημα να μάθει κανείς τη γεωμετρία του Ρίμαν αν δεν έχει προηγουμένως ασχοληθεί με την Ευκλείδεια.

ΑΔ: Αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον: ο Νεύτων που ήταν ευκλείδειος στη γεωμετρία του, ξεπεράστηκε από τον Αϊνστάιν που ήταν ριμάνειος. Με άλλα λόγια, στη φυσική η ριμάνειος γεωμετρία αναίρεσε την ευκλείδεια -- στα μαθηματικά, όμως, η Ευκλείδεια γεωμετρία και η γεωμετρία του Ρίμαν έχουν την ίδια αξία.

ΛΛ: Αυτό δείχνει και τη διαφορά ανάμεσα στη φυσική και τα μαθηματικά. Η φυσική έχει παραδείγματα που είναι αποδεκτά για αιώνες και τα οποία μέσα σε μια μέρα τίθενται εκ νέου υπό αμφισβήτηση. Υπάρχει διαφορά στη φύση των μαθηματικών και της φυσικής. Βέβαια, θα πρέπει να εξετάσουμε και τον ανθρώπινο παράγοντα: στους φυσικούς και τους βιολόγους αρέσει να παρουσιάζουν τα επιτεύγματά τους σαν μια σειρά επαναστάσεων. Οι μαθηματικοί δεν το κάνουν ποτέ αυτό. Αντιμετωπίζουν τα πράγματα με περισσότερη νηφαλιότητα.

ΑΔ: Οι σύγχρονοι μαθηματικοί όμως, όπως εσείς, έφεραν μια επανάσταση καθώς προσπάθησαν να πουν όλα όσα είχαν διατυπωθεί παλαιότερα με βάση τη θεωρία των συνόλων σε μια νέα γλώσσα που βασίζεται στη θεωρία των κατηγοριών, με τον τρόπο που την εφάρμοσε ο Grothendieck. Αν υπάρχει επανάσταση στα μαθηματικά, τη φέρνει ο διαφορετικός τρόπος που βλέπει κανείς τα πράγματα.

ΛΛ: Η θεωρία των συνόλων επέτρεψε την πρόοδο καθώς εξασφάλιζε μεγαλύτερη ακρίβεια. Η θεωρία των κατηγοριών, όπως την εφάρμοσε ο Grothendieck, μας έδωσε τη δυνατότητα να κάνουμε ένα βήμα παραπάνω καθώς ήταν πιο ευέλικτη από τη θεωρία των συνόλων. Η γλώσσα των κατηγοριών είναι πιο οικουμενική από τη γλώσσα των συνόλων. Το πρόβλημα στον κόσμο των μαθηματικών είναι να βρει κανείς τις λέξεις που θα περιγράψουν τα πράγματα.

ΑΔ: Οι λέξεις παίζουν σπουδαίο ρόλο. Για να αποδείξει, για παράδειγμα, με την κλασική γλώσσα της εποχής του την ύπαρξη ενός και μόνο υπερβατικού αριθμού του «έψιλον» (Σημείωση: ο αριθμός που συμβολίζεται με e στα μαθηματικά είναι η βάση των λεγομένων φυσικών λογαρίθμων. Σημείωση: «υπερβατικός» λέγεται στα μαθηματικά ο αριθμός που δεν αποτελεί λύση πολυωνυμικής εξίσωσης.) ο Λιουϊβίλ χρειάστηκε τριακόσιες σελίδες. Με την ανακάλυψη της γλώσσας των συνόλων από τον Κάντορ, όμως, αποδείχθηκε σε δυο μόλις σελίδες ότι *υπάρχουν άπειροι υπερβατικοί. Η νέα γλώσσα επέτρεψε συμπεράσματα που με την παλαιά ήταν αδιανόητα.*

ΛΛ: Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα συναρπαστικό, καθώς δείχνει την εξέλιξη των μαθηματικών. Αποτελέσματα που αρχικά καταλάμβαναν εκατοντάδες σελίδες, μετά από μερικούς αιώνες μπορούν να διατυπωθούν σε πολύ λιγότερες. Υπάρχουν ακόμα αποτελέσματα, όπως τα τρία περίφημα προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι αρχαίοι Έλληνες – ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο διπλασιασμός του όγκου του κύβου – που σήμερα μπορούν να λυθούν σε λίγες σελίδες. Τα μαθηματικά αποδεικνύουν εκτός των άλλων τη δύναμη της γλώσσας, το πόσο αυξάνει η λέξη την ανθρώπινη δύναμη, την ανθρώπινη ελευθερία.

ΑΔ: Ήδη από τον 19^{ο} αιώνα κυριαρχεί η άποψη ότι κάθε μαθηματικός είναι κυρίως είτε αλγεβριστής είτε γεωμέτρης. Πριν από μία εικοσαετία, ο μεγάλος ψυχολόγος Howard Gardner μίλησε πρώτος για περισσότερα από ένα είδη νοημοσύνης. Μίλησε για νοημοσύνη του χώρου, του λόγου, του σώματος, κλπ. Το ενδιαφέρον είναι ότι δεν μίλησε ειδικά για μαθηματική νοημοσύνη, αλλά χώρισε στα δύο τις περιπτώσεις μαθηματικής ικανότητας: η μία είναι η χωρική, η άλλη η υπολογιστική. Με αυτή την έννοια, η σύγχρονη γνωστική ψυχολογία συναντά την αντίληψη των ίδιων των μαθηματικών για το αντικείμενό τους: ένας γεωμέτρης έχει χωρική νοημοσύνη, όμως και ένας ζωγράφος, ενώ ένας αλγεβριστής ανήκει στην κατηγορία της υπολογιστικής, όπως και ένας καλός φιλόλογος. Στην ομιλία σας τονίσατε ότι ο μαθηματικός πρέπει να λαμβάνει γλωσσική παιδεία, ότι η μελέτη της γλώσσας είναι η ιδανική προετοιμασία για τον μαθηματικό. Θεωρώ λοιπόν τη δήλωση σας αυτή χαρακτηριστική ενός αλγεβριστή. Αν ήσασταν γεωμέτρης, νομίζω μπορεί κάλλιστα θα προτείνατε την ενασχόληση με τη ζωγραφική ή την αρχιτεκτονική.

ΛΛ: Δεν ξέρω. Μίλησα βασιζόμενος στη δική μου εμπειρία.

ΑΔ: Την εμπειρία ενός αλγεβριστή!

ΛΛ: Στον τομέα μου, τη μελέτη του Προγράμματος του Langlands, πρέπει να ασχολούμαι ταυτόχρονα με την άλγεβρα, τη γεωμετρία και την ανάλυση.

ΑΔ: Ποια προτιμάτε όμως, ποιά σας αρέσει πιο πολύ;

ΛΛ: Το συναρπαστικό στον τομέα μου είναι ότι ασχολείται κυρίως με τις δομές. Με βάση αυτή μου την προτίμηση, σίγουρα θα μπορούσα να θεωρηθώ αλγεβριστής. Βλέπετε, οι άνθρωποι που κάνουν ένα συγκεκριμένο είδος ανάλυσης ή ακόμα και οι θεωρητικοί των αριθμών ικανοποιούνται και με προσεγγιστικά αποτελέσματα. Ένας θεωρητικός των αριθμών βρίσκει συναρπαστικούς τους πρώτους αριθμούς και την κατανομή τους, που είναι ένα πρόβλημα που έχει μόνο προσεγγιστική απάντηση.

ΑΔ: Ακόμη και αν αποδειχθεί η Υπόθεση του Ρίμαν;

ΛΛ: Ακόμα και με την Υπόθεση του Ρίμαν δεν θα έχουμε ένα οριστικό αποτέλεσμα που θα μας πει πως ακριβώς κατανέμονται οι πρώτοι αριθμοί. Νομίζω ότι δεν πρόκειται ποτέ να κατανοήσουμε απόλυτα τους πρώτους αριθμούς. Αποτελούν ένα μαγευτικό μυστήριο το οποίο μπορούμε μόνο ως ένα βαθμό να προσεγγίσουμε. Κι όλη η θεωρία των αριθμών είναι έτσι. Έχουμε την εντύπωση ότι οι αριθμοί πάντα μας διαφεύγουν.

ΑΔ: Στο μέσο άνθρωπο αυτό ακούγεται παράδοξο. Αν κανείς γνωρίζει μόνο λίγα πράγματα σχετικά με τα μαθηματικά, θεωρεί ότι είναι μαθηματικά είναι κυρίως οι αριθμοί. Αν γνωρίζει και κάτι λίγο παραπάνω, θεωρεί ότι υπάρχουν τα μαθηματικά των αριθμών, που είναι πολύ συγκεκριμένα και βαρετά και τα ανώτερα μαθηματικά, που είναι πιο ενδιαφέροντα και αφηρημένα. Από τα λεγόμενά σας, όμως, προκύπτει ότι τα μαθηματικά των αριθμών είναι τα πιο αβέβαια.

ΛΛ: Ναι. Δεν υπάρχει τίποτα δυσκολότερο στα μαθηματικά από τους αριθμούς. Οι δομές, για παράδειγμα, είναι πολύ πιο απλές από τους αριθμούς. Οι μαθηματικοί εργάζονται για να βρουν δομές που θα τους επιτρέψουν να προσεγγίσουν τους αριθμούς, να τους περικυκλώσουν και να τους κλείσουν σε έναν όσο το δυνατό πιο περιορισμένο χώρο. Δεν θα μπορέσουν όμως ποτέ να τους συλλάβουν. Οι αριθμοί διαφεύγουν διαρκώς και οι θεωρίες προσπαθούν να τους προσεγγίσουν όσο το δυνατόν περισσότερο.

ΑΔ: Γνωρίζετε τη δουλειά του αμερικάνου μαθηματικού Gregory Chaitin σχετικά με την αλγοριθμική θεωρία της πληροφορίας.

ΛΛ: Όχι.

ΑΔ: Παρουσιάζει ένα νέο μέτρο της πολυπλοκότητας, σχετικό με του Kolmogorov, που συνδέει την πολυπλοκότητα με τους υπολογιστές. Ουσιαστικά, ο βαθμός πολυπλοκότητας ενός *αντικειμένου ορίζεται από το πόσο σύντομα μπορεί κάτι να ορισθεί με ένα πρόγραμμα. Αν έχετε π.χ. τον αριθμό 00000... με χίλια μηδενικά αρκεί μόνο μια εντολή του τύπου «τύπωσε το 0 χίλιες φορές» ενώ μια εντελώς τυχαία σειρά από τα ψηφία 0 και 1, μέχρι το χίλια, θέλει χίλιες εντολές. Αυτό που λέει ο Chaitin, το οποίο, σε άλλη παραλλαγή, διάβασα και στο βιβλίο του μεγάλου γάλλου μαθηματικού Alain Connes, είναι ότι μέσω της πολυπλοκότητας αυτής οδηγούμαστε σε μια ριζικά διαφορετική εικόνα των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Θεώρημα της Μη-πληρότητας του Γκέντελ, ξέρουμε ήδη ότι σε κάθε μαθηματικό σύστημα που είναι αρκετά σύνθετο για να περιέχει τους αριθμούς, υπάρχει μία τουλάχιστον πρόταση που, αν και αληθινή, δεν μπορεί να αποδειχθεί. Ο Chaitin υποστηρίζει, και ο Connes συμφωνεί, ότι κατά πάσα πιθανότητα οι περισσότερες προτάσεις δεν μπορούν να αποδειχθούν. Μήπως, λοιπόν, είναι αρκετά φυσικό οι αριθμοί να είναι κατά βάθος τόσο δύσκολοι, ακριβώς επειδή είναι «εκεί έξω», επειδή προϋπάρχουν, έξω από εμάς, επιβεβαιώνοντας την άποψη των πλατωνικών ότι οι μαθηματικές αλήθειες προϋπάρχουν. Χαρακτηριστική είναι η φράση του γερμανού μαθηματικού Λέοπολντ Κρόνεκερ, ο οποίος είπε ότι «ο καλός Θεός δημιούργησε τους φυσικούς αριθμούς και όλα τα υπόλοιπα είναι έργα του ανθρώπου». (Σημείωση: «φυσικοί» αριθμοί λέγονται στα μαθηματικά οι θετικοί ακέραιοι, 1, 2, 3, 4... κλπ.) Μήπως θα μπορούσαμε να πούμε πως με αυτή την έννοια η θεωρία των αριθμών είναι η φυσική των μαθηματικών. Οι δομές, όπως είπατε και προηγουμένως, είναι πιο ξεκάθαρες καθώς είναι σε μεγάλο βαθμό τεχνητές, επινόηση του ανθρώπου. Οι αριθμοί είναι πιθανώς λιγότερο ξεκάθαροι γιατί μετέχουν του μυστηρίου της φύσης.*

ΛΛ: Θεωρώ ότι η σκέψη σας ότι οι θεωρία αριθμών είναι «η φυσική των μαθηματικών» είναι απόλυτα ορθή. Οι αριθμοί είναι το κύριο αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών και μας διαφεύγουν διαρκώς. Αν μπορούσαμε να κατανοήσουμε πλήρως τους αριθμούς, ίσως τα μαθηματικά να έπαυαν να υπάρχουν. Όλα θα τελείωναν. Από ότι φαίνεται, όμως, τόσο τα μαθηματικά όσο και όλες οι ανθρώπινες δραστηριότητες αφήνουν πάντα χώρο για εμβάθυνση. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ο άνθρωπος πίστευε ότι τα γνώριζε όλα και ότι σύντομα θα κατανοούσε τα πάντα γύρω του. Σήμερα, όμως, γνωρίζουμε καλά ότι η περιπέτεια της γνώσης δεν πρόκειται να τελειώσει ποτέ. Όσο προχωράμε, ανακύπτουν νέα ερωτήματα. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται ακόμα και σε έναν τόσο καλά ορισμένο τομέα όπως τα μαθηματικά. Μπορούμε να πούμε ότι η ιστορία των μαθηματικών ξεκίνησε με τους φυσικούς αριθμούς. Πάνω σε αυτούς χτίστηκε ένα μεγαλύτερο οικοδόμημα. Ακόμα και οι φυσικοί αριθμοί, όμως, αφήνουν περιθώρια για περαιτέρω εμβάθυνση, μια εμβάθυνση που δεν είναι επιτηδευμένη και δεν χάνεται σε λεπτομέρειες. Κάθε φορά που εμβαθύνουμε στα μαθηματικά, κατανοούμε καλύτερα και δίνουμε μια συνέχεια, προσθέτουμε μια νέα διάσταση σε παλιότερες γνώσεις.

ΑΔ: Θεωρώ ενδιαφέρον, πριν μιλήσουμε για την εντύπωση που δημιουργούν οι μαθηματικοί στον πολύ κόσμο, έξω από την επιστήμη τους, να σας διηγηθώ τις δύο συναντήσεις μου με τον Grothendieck και τις εντυπώσεις μου από αυτόν. Ανακάλυψα τα μαθηματικά όταν ήμουν δεκατεσσάρων ετών και ήδη στα δεκάξη μου φοιτούσα στο πανεπιστήμιο Columbia. Το 1970, πήγα στο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο της Νίκαιας, μαζί με τον καθηγητή μου Samuel Eilenberg, τον πατέρα της Θεωρίας των Κατηγοριών, ο οποίος με σύστησε σε πολλά μεγάλα ονόματα καθώς και στον Grothendieck. Μόλις αυτός ο τελευταίος πληροφορήθηκε ότι είμαι Έλληνας, άρχισε να με ρωτά με μεγάλο ενδιαφέρον για την πολιτική κατάσταση, καθώς τότε υπήρχε δικτατορία στην πατρίδα μας. Με εντυπωσίασε το γεγονός ότι έμοιαζε να ενδιαφέρεται για την πολιτική κατάσταση περισσότερο από ότι για τα μαθηματικά, τόσο που ο Eilenberg στεκόταν παράμερα και χαμογελούσε αμήχανα – όπως ξέρετε, ο Grothendieck εκείνα τα χρόνια είχε ήδη αρχίσει να εγκαταλείπει τα μαθηματικά, και να ενδιαφέρεται όλο και περισσότερο για την πολιτική και την οικολογία. Έπειτα από δύο χρόνια, βρέθηκα κάποια στιγμή στο Princeton όπου ο Grothendieck έδινε διάλεξη, και πήγα να τον παρακολουθήσω, χωρίς βέβαια να καταλαβαίνω και πολλά πράγματα. Θυμήθηκε όμως αμέσως την παλαιότερη συνάντησή μας και άρχισε πάλι να με ρωτά για την Ελλάδα. Αυτό που με εντυπωσίασε περισσότερο αυτή τη φορά, όμως, ήταν η ίδια η διάλεξη, το πως έγινε. Το 1972 ο κόσμος δεν είχε ακόμα αναπτύξει οικολογική συνείδηση, η ίδια η έννοια της οικολογίας δεν υπήρχε. Σε πλήρη παράβαση των συνηθισμένων κανόνων των επιστημονικών ειδικών διαλέξεων, λοιπόν – πράγμα που «του πέρασε» μόνο επειδή ήταν αυτός που ήταν, ένας θεός των μαθηματικών! – ο Grothendieck είχε δεχθεί να μιλήσει για τα μαθηματικά στο κοινό της μαθηματικής σχολής μόνο αν στο πρώτο μισό της διάλεξής θα είχε τη δυνατότητα να παρουσιάσει το πρόβλημα της μόλυνσης του περιβάλλοντος. Πράγμα που έγινε. Η ομιλία του – το πρώτο μισό δηλαδή! – ήταν προφητική, είπε πράγματα πρωτοφανή για εκείνα τα χρόνια, αλλά κανείς μέσα στην αίθουσα δεν τους έδινες σημασία, οι μαθηματικοί παρακολουθούσαν απλώς από υποχρέωση, κάνοντας και κάποια πολύ διακριτική «καζούρα» μπορώ να πω, μεταξύ τους. Όταν όμως, στη μέση του χρόνου του, ο Grothendieck άρχισε να μιλά για τα μαθηματικά, για ένα εξαιρετικά θεωρητικό και αφηρημένο θέμα, χωρίς την παραμικρή σχέση με την ανθρώπινη ζωή, όλοι άρχισαν να τον παρακολουθούν με τεράστιο ενδιαφέρον, σαν να έβλεπαν το τρομερότερο θρίλερ! Φυσικά, οι μαθηματικοί θεωρούσαν τότε ότι ο Grothendieck είναι τρελός που ασχολείται με όλα αυτά τα «άσχετα» πράγματα – δηλαδή την οικολογία! Κι όμως, βλέποντας το σήμερα, φαίνεται πόσο ο λόγος του *ήταν ευαισθητοποιημένος ήταν απέναντι στα μεγάλα παγκόσμια προβλήματα. Από την εποχή του Αρχιμήδη ακόμα, η εικόνα που έχει το πλατύ κοινό για τον μαθηματικό δεν είναι αυτή που παρουσίασε ο Grothendieck εκείνη τη μέρα, αλλά η αντίθετη, ενός μοναχικού ανθρώπου, αφοσιωμένου στην επιστήμη του που δεν νοιάζεται για τα όσα συμβαίνουν γύρω του. Να πω εδώ σχετικά ότι όταν ο αμερικάνος μαθηματικός Ken Ribet – ένας από τους βασικούς πρωταγωνιστές της απόδειξης του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά – διάβασε τον Θείο Πέτρο, μου έγραψε ότι και εγώ προωθώ αυτή την – κατ' αυτόν κάπως ξεπερασμένη – άποψη. Φυσικά, ο Ribet ως μαθηματικός, είναι συνηθισμένος σε γενικές αρχές, ενώ εγώ ως μυθιστοριογράφος στην εξειδίκευση, στην ειδική περίπτωση, κι ο Θείος Πέτρος του βιβλίου μοου είναι ένα αρκετά κοινό είδος μαθηματικού. Η άποψη αυτή, βέβαια, κάπως αλλάζει τα τελευταία χρόνια, και βλέπουμε πια κάποιους μαθηματικούς να εκδηλώνουν μια καινούργια εξωστρέφεια. Έτσι και μέσα στα ίδια τα μαθηματικά, η δική σας δουλειά σχετικά με το Πρόγραμμα του Langlands, ας πούμε, εντάσσεται σε μία από τις πιο σημαντικές ομαδικές προσπάθειες στον χώρο των σύγχρονων μαθηματικών. Στον αντίποδά της όμως βρίσκονται οι μεμονωμένες, άκρως μοναχικές προσπάθειες, όπως της απόδειξης του θεωρήματος του Φερμά από τον Άντριου Γουάϊλς ή της Υπόθεσης του Πουανκαρέ από τον Γκριγκόρι Πέρελμαν...*

ΛΛ: ...Δεν είμαι βέβαιος αν ο Πέρελμαν μιλά για απόδειξη του θεωρήματος του Πουανκαρέ στο κείμενό του.

ΑΔ: ...Μιλά για την απόδειξη της Εικασία της Γεωμετροποίησης του Θέρστον, που την έχει ως υποπερίπτωση. Ποιά είναι η γνώμη σας, υπάρχει στα μαθηματικά περισσότερος χώρος για ομαδική δουλειά ή το μοντέλο του μοναχικού επιστήμονα κυριαρχεί;

ΛΛ: Για τον Γουάϊλς, είναι γνωστό ότι εργάστηκε για πολλά χρόνια μόνος. Συνεργασίες βέβαια γίνονται στα μαθηματικά – συχνά, για παράδειγμα, δημοσιεύονται άρθρα υπογεγραμμένα από δύο ή τρεις επιστήμονες, αν και από τρεις είναι αρκετά σπάνιο – αλλά ο μαθηματικός είναι κατά βάση μόνος του όταν μελετά και ερευνά. Βέβαια, ακόμα και το αποτέλεσμα που έφερε ο Γουάϊλς είναι ουσιαστικά αποτέλεσμα συλλογικής προσπάθειας. Αυτός έβαλε τον τελευταίο λίθο σε ένα τεράστιο οικοδόμημα, και το κατάφερε βασιζόμενος στην πρόοδο που συντελέστηκε στα μαθηματικά όλους τους προηγούμενους αιώνες, χρησιμοποίησε την αλγεβρική γεωμετρία του Grothendieck, τη θεωρία του Langlands. Στα μαθηματικά συμβαίνει το εξής παράδοξο: μόνο αυτός που κάνει το τελευταίο βήμα παίρνει όλη τη δόξα. Ακόμα και η περίπτωση του Γουάϊλς είναι, κατά τη γνώμη μου, μια ακόμα απόδειξη του ότι τα μαθηματικά είναι ένα συλλογικό έργο. Τα προβλήματα, εύκολα ή δύσκολα, μεταφέρονται από γενιά σε γενιά κι έτσι υπάρχει μια διαρκής συνεργασία. Πάρτε για παράδειγμα τη θεωρία των αριθμών. Είναι εκπληκτικό να βλέπει κανείς έναν τομέα που ξεκίνησε χιλιάδες χρόνια, με τον Πυθαγόρα, να αποτελεί αντικείμενο έρευνας μέχρι και σήμερα. Αν εξετάσουμε την ιστορία της θεωρίας των αριθμών, θα διαπιστώσουμε ότι ακόμα και τα μεγάλα ονόματα στα μαθηματικά προσέφεραν ουσιαστικά ελάχιστα, ως άτομα, σε σχέση με το συνολικό έργο. Θεωρώ λοιπόν ότι στον κόσμο των μαθηματικών η έννοια του ατομικισμού δεν λειτουργεί. Ως μαθηματικός έχω συνείδηση του ότι ανήκω σε μια διεθνή επιστημονική κοινότητα. Είμαι Γάλλος και μάλιστα πολύ υπερήφανος για την καταγωγή μου, αλλά ταυτόχρονα γίνομαι μέσα από τα μαθηματικά πολίτης του κόσμου. Τόσο η σχέση που αναπτύσσεται με μαθηματικούς από όλες τις χώρες του κόσμου όσο και η έννοια της συνέχειας του έργου των προκατόχων μου με βοηθούν να αντιληφθώ το συλλογικό χαρακτήρα των μαθηματικών. Υπάρχουν σήμερα πολλοί μαθηματικοί σπουδαιότεροι από εμένα οι οποίοι, όμως, δεν φαίνονται τελικά και τόσο σπουδαίοι αν τους δει κανείς μέσα στα πλαίσια του τεράστιου οικοδομήματος που αποτελούν τα μαθηματικά. Είναι πράγματι εντυπωσιακό. Τα μαθηματικά έφθασαν στο σημείο που βρίσκονται σήμερα χάρη σε προσπάθεια που κατέβαλε ο άνθρωπος για αιώνες. Ο Jean Dieudonné ονόμασε, ενδεικτικά, το έργο του για την ιστορία των μαθηματικών *Για την τιμή του ανθρώπινου πνεύματος*. Τα μαθηματικά μοιάζουν με κάθε άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα όπως η τέχνη, η λογοτεχνία, η φυσική, η μουσική. Μας κάνουν να αντιληφθούμε πόσο δύσκολο είναι να σημειώσουμε ακόμα και ελάχιστη πρόοδο, πόσο το πνεύμα μας είναι αδύναμο. Αντιλαμβανόμαστε, όμως, ότι η πρόοδος δεν σταματά ακόμα κι αν είναι αργή. Η γνώση συσσωρεύεται και κληροδοτείται στις επόμενες γενιές. Εδώ και δυο χιλιάδες χρόνια χτίζεται στα μαθηματικά ένα θαυμαστό οικοδόμημα. Όπως και όλοι οι υπόλοιποι μαθηματικοί έτσι κι εγώ είμαι ένα μικρό μέρος αυτού του μεγαλείου και τα μαθηματικά με τη σειρά τους είναι μια σταγόνα στον ωκεανό των επιτευγμάτων του ανθρώπου. Το ανθρώπινο πνεύμα μπορεί πάντα να προοδεύει και να εμβαθύνει στα πράγματα. Ο άνθρωπος συνεχίζει να καταπιάνεται με ποικίλες δραστηριότητες. Μία από αυτές είναι και τα μαθηματικά, στα πλαίσια των οποίων κάθε άτομο είναι ένας μικρός εργάτης που προάγει το συλλογικό αυτό έργο.

ΑΔ: Ο Άντριου Γουάϊλς θα συμφωνούσε με αυτή την άποψη;

ΛΛ: Νομίζω πως ναι. Όλοι οι μαθηματικοί το αντιλαμβάνονται αυτό.

ΑΔ: Ξέρετε, είχε κατακριθεί από ορισμένους ότι είχε απομονωθεί και εργαζόταν για χρόνια μόνος, όπως ο Θείος Πέτρος στο βιβλίο μου, χωρίς να ενημερώνει κανέναν για την πρόοδο της δουλειάς του. Θεωρείτε ότι υπάρχει κάτι που αντίκειται στην έννοια του ήθους της επιστήμης στη στάση αυτή, κάτι;

ΛΛ: Θα πρέπει να πούμε ότι το θεώρημα του Φερμά, με το οποίο ασχολήθηκε ο Γουάϊλς, γοήτευε τους ανθρώπους για τρεισήμισι αιώνες, ήταν έντονα συναισθηματικά φορτισμένο, και για αυτό δεν είπε (σωστά νομίζω) σε κανένα συνάδελφό του ότι ασχολείται με αυτό. Και κάτι ακόμα. Αντίθετα με τον ήρωα του βιβλίου σας, τον Θείο Πέτρο, ο Γουάϊλς δεν ξεκίνησε να λύσει ένα πρόβλημα από την αρχή, αλλά εκμεταλλεύτηκε τη μέχρι τότε πρόοδο για να δώσει την τελική απάντηση σε ένα πρόβλημα που μελετούνταν για πολλά χρόνια. Τα μαθηματικά εξελίσσονται κατά κύριο λόγο με αφετηρία ήδη υπάρχουσες θεωρίες, ασχολούμαστε κυρίως με τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες που έχουν περιθώρια εξέλιξης. Τα προβλήματα που προσπαθούμε να λύσουμε επιτρέπουν ακριβώς την εμβάθυνση στις θεωρίες αυτές. Η όλη διαδικασία είναι ανάλογη με την ανάπτυξη της τεχνολογίας. (Τα πλοία, για παράδειγμα, έχουν περιθώρια εξέλιξης γι αυτό και αναπτύσσονται τεχνολογικές μέθοδοι που θα τα βελτιώσουν.) Ξεκινά κανείς από τα γνωστά και αφού διαπιστώσει ότι υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης, αναπτύσσει ολοένα και καλύτερες μεθόδους για να πετύχει το στόχο αυτό. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε ότι και στα μαθηματικά η τεχνική βελτιώνεται και έρχονται στα χέρια μας νέα εργαλεία, νέα όπλα που μας βοηθούν να λύσουμε προβλήματα που μέχρι πρότινος μας δυσκόλευαν. Αυτό συνέβη και στην περίπτωση του θεωρήματος του Φερμά. Το πρόβλημα γοήτευε τους ανθρώπους εδώ και αιώνες για την απλότητα και την ομορφιά του. Αρχικά, είχαν την ψευδαίσθηση ότι η λύση του θα βρισκόταν εύκολα. Αποδείχθηκε όμως ένας ορίζοντας που όσο κανείς τον πλησίαζε τόσο απομακρυνόταν. Μετά την ανάπτυξη νέων μεθόδων, το πρόβλημα βρισκόταν κοντά στη λύση του. Ο Γουάϊλς ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε ότι υπάρχουν αυτές οι δυνατότητες και αμέσως ενήργησε ανάλογα με το χαρακτήρα του.

ΑΔ: Θα ήθελα να ρωτήσω κάτι ακόμα. Αυτή την περίοδο στην Ελλάδα η κυβέρνηση θέλει να αναμορφώσει το εκπαιδευτικό σύστημα. Δεν θα θίξω το θέμα της μαθηματικής εκπαίδευσης γιατί είναι τεράστιο, αλλά θέλω να σας ρωτήσω κάτι σχετικά με τη δική σας εκπαίδευση. Κατ αρχήν, πόσοι από τους μαθηματικούς που έχουν βραβευθεί με το Μετάλλιο Φηλντς είναι Γάλλοι;

ΛΛ: Οκτώ από τους σαράντα τέσσερις.

ΑΔ: Ωραία. Από αυτούς τους οκτώ, μόνο ένας, ο Grothendieck δεν φοίτησε στην École Normale. Πού οφείλεται η υπεροχή της École Normale, ότι μπορεί να παράγει επτά μαθηματικούς τέτοιου επιπέδου;

ΛΛ: Στη Γαλλία οι καλύτεροι μαθητές – τουλάχιστον αυτοί που θέλουν να ασχοληθούν με την έρευνα – συνεχίζουν τις σπουδές τους στην École Normale. Με ρωτάτε γιατί η γαλλική μαθηματική σχολή είναι τόσο καλή... Κάτι πολύ σημαντικό που θα πρέπει να τονίσουμε και που δεν έχει να κάνει μόνο με τα μαθηματικά αλλά με όλες τις επιστήμες είναι ότι δεν υπάρχει, δηλαδή δεν έχει τόση σημσία, αυτό που λέμε ταλέντο. Η επιτυχία βασίζεται στην υποδομή. Το σχολείο θα επιτρέψει στους νέους να καλλιεργηθούν και θα μεταλαμπαδεύσει τη γνώση από τις προηγούμενες στις επόμενες γενιές. Είμαι βέβαιος πως κανείς δεν γνωρίζει πόσο ταλαντούχος είναι. Ο άνθρωπος έχει απεριόριστες δυνατότητες, αλλά κάτι φαίνεται να τον εμποδίζει να τις αναπτύξει. Προκειμένου οι δυνατότητες αυτές να αναπτυχθούν, χρειάζεται υποδομή, κοινωνική υποδομή. Όσον αφορά τα μαθηματικά, μετά τον Πρώτο Παγκόσμιο πόλεμο επέστρεψε στη Γαλλία – από τη Γερμανία, την Ιταλία, τη Μ. Βρετανία – μια ομάδα νέων ανθρώπων που έχτισαν τη μαθηματική σχολή της. Το γαλλικό σχολείο ξεκίνησε ξανά από το μηδέν και άνθισε. Ο αρχικός αυτός πυρήνας πέρασε τις γνώσεις του στις επόμενες γενιές. Οι μαθηματικοί που ασχολούνται σήμερα με την έρευνα στη Γαλλία είναι όλοι απόγονοι αυτής της ομάδας των νέων ανθρώπων. Όταν υπάρχει υποδομή, τα ταλέντα μπορούν να αναπτυχθούν, να εκφραστούν. Πέρα από το παράδειγμα των μαθηματικών στη Γαλλία του 20ου αιώνα υπάρχει και το ακόμα πιο τρανταχτό παράδειγμα της αρχαίας Ελλάδας. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι οι κάτοικοι των Αθηνών ήταν πιο έξυπνοι από τους κατοίκους άλλων περιοχών. Υπήρχε υποδομή κατάλληλη να επιτρέψει την εμφάνιση των ταλέντων. Το θέμα της εκπαίδευσης είναι πολύ σημαντικό. Ανησυχώ ιδιαίτερα για το πώς εξελίσσονται τα πράγματα στον τομέα της παιδείας σε όλες τις χώρες του δυτικού κόσμου. Δεν είμαστε εκ φύσεως μαθηματικοί. Μπορούμε να γίνουμε μαθηματικοί, να αναπτύξουμε τις δυνατότητες μας μόνο όταν οι συνθήκες είναι ευνοϊκές. Και τις ευνοϊκές συνθήκες εξασφαλίζει η εκπαίδευση. Προσωπικά δεν ασχολήθηκα ιδιαίτερα με τα μαθηματικά παρά μόνο μετά τα είκοσί μου χρόνια. Πρώτα από όλα πρέπει κανείς να μάθει καλά τη γλώσσα του. Όταν είμαστε έξη ώς δέκα χρονών μαθαίνουμε εύκολα. Αυτό το διάστημα είναι από τα πιο κρίσιμα σε όλη μας τη ζωή. Αν το εκπαιδευτικό σύστημα παρακμάσει, δεν πρόκειται να αναδειχθούν άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί, επιστήμονες ή λογοτέχνες.

ΑΔ: Θεωρώ πολύ σημαντικό αυτό που είπατε για το ταλέντο. Όχι πως δεν υπάρχει το ταλέντο. Κάθε άνθρωπος έχει κλίση περισσότερο σε κάτι από ό,τι σε κάτι άλλο. Το ταλέντο, όμως, δεν είναι τόσο σπουδαίο. Πιστεύω, μάλιστα, πως βρίσκεται στη ρίζα των μεγαλύτερων προβλημάτων μας. Στο 18ο και το 19ο αιώνα το ταλέντο ήταν ένας ρομαντικός μύθος. Έπειτα, όμως, ο μύθος αυτός έγινε κοινωνικός, κυριάρχησε, και είναι πια το μεγαλύτερο εμπόδιο στη δημιουργικότητα και την εργατικότητα. Ο κόσμος θεωρεί ότι υπάρχει ένας μαγικός, εύκολος τρόπος να πετύχεις. Διερωτώμαι αν η απαισιοδοξία σας για την πορεία της εκπαίδευσης στη Δύση πηγάζει από την επίγνωση αυτού του προβλήματος. Στη διάλεξή σας τονίσατε ότι τα μαθηματικά χρειάζονται σκληρή δουλειά και ότι οι άνθρωποι είναι ολοένα και λιγότερο πρόθυμοι να κοπιάσουν.

ΛΛ: Συμφωνώ απόλυτα με τα όσα είπατε. Ο μύθος του ταλέντου αποτελεί μεγάλο πρόβλημα. Οι άνθρωποι πιστεύουν ότι αν έχεις ταλέντο, μπορείς να κάνεις αμέσως εκπληκτικά πράγματα κι αν πάλι δεν έχεις, δεν μπορείς να κάνεις τίποτα. Και στις δύο περιπτώσεις, λοιπόν, δεν χρειάζεται να εργαστείς. Πρέπει να πείσουμε τους εαυτούς μας ότι δεν έχει σημασία αν έχουμε πολύ ή λίγο ταλέντο – να μην αναρωτιόμαστε καν. Το μόνο που χρειάζεται είναι να μη σταματήσουμε ποτέ να εμβαθύνουμε, να ερευνούμε. Στην αυτοβιογραφία του ο Grothendieck επαναλαμβάνει ότι στη ζωή του συνάντησε εκατοντάδες μαθηματικούς που ήταν πιο ταλαντούχοι από αυτόν. Πιστεύω ότι λέει αλήθεια. Γνώρισε εκατοντάδες μαθηματικούς που έβρισκαν τα μαθηματικά ευκολότερα ή που σκέφτονταν ταχύτερα. Ο Grothendieck όμως κατά τη δημιουργική του περίοδο δεν σταμάτησε ποτέ να εμβαθύνει. Έπαιρνε ένα ερώτημα, ήθελε να το κατανοήσει και αναζητούσε με τόση ζέση την αλήθεια που συνέχιζε να δουλεύει, να δουλεύει με το δικό του τρόπο, με το γράψιμο. Κατά τη δημιουργική του περίοδο λέγεται ότι έγραφε πενήντα σελίδες την ημέρα! Έγραφε ό,τι του περνούσε από το μυαλό. Βέβαια, οι σκέψεις δεν εμφανίζονταν έτοιμες στο μυαλό του, πίστευε, όμως, στη δημιουργική δύναμη της συγγραφής, τις επεξεργαζόταν γράφοντας. Ακόμα κι αν δεν έχουμε σκεφτεί τίποτε, όταν αρχίσουμε να γράφουμε αντιλαμβανόμαστε ότι η συγγραφή μάς οδηγεί σε νέους δρόμους. Με αυτό τον τρόπο ο άνθρωπος μπορεί να εμβαθύνει, να αναζητήσει την αλήθεια. Δεν μπορώ να πω πως ο Grothendieck αποτελεί πρότυπο για τη σύγχρονη εκπαίδευση. Ο ίδιος, μάλιστα, είχε δικές του απόψεις περί της παιδείας – είχε απαγορεύσει στα παιδιά του να πάνε στο σχολείο, για παράδειγμα, με καταστροφικές συνέπειες. Εγώ πιστεύω πως πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τα παιδικά και εφηβικά χρόνια για να δημιουργήσουμε τις βασικές γνώσεις. Μίλησα για την εκμάθηση της γλώσσας. Στα γαλλικά πρέπει κανείς να διδαχθεί την κλίση των ρημάτων, τη γραμματική, τη συμφωνία των μετοχών. Όλες αυτές οι βασικές γνώσεις παραμελούνται ολοένα και περισσότερο γιατί είναι πολύ απλές, «χαζές» (*bêtes*) με κάποια έννοια. Ακόμα κι ένα τεράστιο μεγαλοπρεπές κτήριο, όμως, αποτελείται από τα τούβλα που είναι ένα πολύ απλό υλικό. Πρέπει λοιπόν να μαθαίνουμε και αυτά που πολλοί θεωρούν χαζά – όχι μόνο όταν διδασκόμαστε τη γλώσσα αλλά και σε οποιοδήποτε μάθημα και κυρίως στα μαθηματικά. Στη Γαλλία θέλησαν να διδάξουν στα παιδιά τα μαθηματικά με πιο έξυπνο τρόπο, θέτοντάς τους ερωτήσεις κρίσεως. Βέβαια, είναι καλό να βάζει κανείς τα παιδιά να σκέφτονται, αλλά δεν πρέπει να παραβλέπει τη συστηματική διδασκαλία, στα πλαίσια της οποίας διδάσκονται και απλά, χαζά πράγματα όπως οι κλίσεις των ρημάτων ή, στα ελληνικά, οι πτώσεις των ουσιαστικών. Και στα μαθηματικά υπάρχουν κείμενα όπως τα *Στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας*, που ώρες ώρες είναι τόσο απλά που να τα πεις «χαζά». Όλα όσα περιγράφει ο Grothendieck είναι με κάποια έννοια στοιχειώδη.

ΑΔ: Πρέπει όμως να έχει κανείς συναισθηματικό κίνητρο για να διαβάσει με προσοχή ένα κείμενο σαν το συγκεκριμένο.

ΛΛ: Συμφωνώ, χρειάζεται και αυτό. Αλλά δεν πρέπει να ντρεπόμαστε να διδάσκουμε τα βασικά, απλά πράγματα σε όλους τους τομείς της δραστηριότητας. Στην τέχνη, για παράδειγμα, υπάρχει σήμερα μια τάση να εκφράζονται πράγματα χωρίς προηγουμένως ο καλλιτέχνης να έχει μάθει τις απαραίτητες τεχνικές. Η τέχνη είναι πρώτα από όλα τεχνική. Η ελληνική τέχνη των κλασικών χρόνων ήταν πρώτα και πάνω από όλα τεχνική.

ΑΔ: Μου αρέσει σχετικά η εξής ιστορία: ένας φίλος είπε κάποτε στον μεγάλο γάλλο ποιητή, τον Στεφάν Μαλαρμέ ότι ενώ είχε πολλές ιδέες δεν μπορούσε να γράψει ούτε ένα σονέτο. Ο Μαλαρμέ του απάντησε: «Είναι πολύ φυσικό. Τα σονέτα δεν γράφονται με ιδέες, γράφονται με λέξεις».