Προβλήματα για τον 21ο αιώνα...

του Τεύκρου Μιχαηλίδη

Τον Αύγουστο του 1900, έγινε στο Παρίσι το Δεύτερο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών. Ο David Hilbert, ο κορυφαίος μαθηματικός εκείνης της εποχής, σε μια ιστορική ομιλία παρουσίασε τα 23 προβλήματα που κατά τη γνώμη του θα απασχολούσαν τα μαθηματικά του 20ου αιώνα. Είτε γιατί ο Hilbert, με τη γνώση και τη διορατικότητά του μπόρεσε να προβλέψει σωστά, είτε γιατί το κύρος του επηρέασε τους συναδέλφους του, το γεγονός είναι ότι αυτά τα 23 προβλήματα κυριάρχησαν σε μεγάλο βαθμό στα μαθηματικά του εικοστού αιώνα. Κάποια από αυτά λύθηκαν πλήρως ή εν μέρει, άλλα αναδιατυπώθηκαν και γενικεύτηκαν και τέλος τρία περιμένουν ακόμα τη λύση τους, κληροδότημα του αιώνα που πέρασε προς τη χιλιετία που άρχισε.

Το Clay Mathematics Institute της Μασσαχουσέτης, ένα ίδρυμα που χρηματοδοτείται από τον επιχειρηματία Landon Clay, βρήκε έναν καθαρά αμερικάνικο τρόπο για να γιορτάσει την εκατονταετηρίδα αυτής της μνημειώδους ομιλίας και να τραβήξει το ενδιαφέρον του κοινού αλλά και των πολιτικών προς τα μαθηματικά. Ανέθεσε σε τέσσερις κορυφαίους μαθηματικούς (ανάμεσά τους και ο Andrew Wiles που έλυσε πρόσφατα το πρόβλημα του Fermat, ένα πρόβλημα που περίμενε τη λύση του για 350 χρόνια περίπου) να συντάξουν ένα κατάλογο από επτά προβλήματα, «τα προβλήματα της νέας χιλιετίας». Για καθένα από αυτά, προσφέρεται αμοιβή ενός εκατομμυρίου δολλαρίων (περίπου 400 εκατομμυρίων δραχμών). Η επιτροπή συγκεντρώθηκε στο College de France της Γαλλίας και επέλεξε έξι νέα προβλήματα, τα οποία ήρθαν να προστεθούν στο πιο ξακουστό κόσμημα της συλλογής του Hilbert που αντιστέκεται ακόμα. (Πρόκειται για το όγδοο πρόβλημα, την κατανομή των πρώτων αριθμών που συνδέεται με την υπόθεση του Riemann).

Παρά το αναμφισβήτητο κύρος των τεσσάρων μαθηματικών του Clay Institute, και τη δεδομένη σοβαρότητα των επτά προβλημάτων, το εγχείρημα δεν παύει να είναι κατά βάση επικοινωνιακό. Τα εκατομμύρια δολλάρια που πανάξια θα εισπράξουν αυτοί που σε δέκα, πενήντα ή πεντακόσια χρόνια θα λύσουν τα προβλήματα, στοχεύουν στο να θυμίσουν στον κόσμο ότι τα μαθηματικά, εκτός από σχολικός βραχνάς ή εργαλείο κοινωνικής επιλογής, είναι και μια ζωντανή επιστήμη, ή όπως λέει ο Arthur Jaffe, ο ένας από τους τέσσερις του Clay Institute, «...η βάση της επιστήμης και ο αναντικατάστατος μοχλός του επιπέδου ζωής μας...» Χωρίς αυτά δεν θα είχαμε, «ούτε υπολογιστές, ούτε συστήματα εντοπισμού των οχημάτων, ούτε ημιαγωγούς, ούτε γονιδιακή έρευνα, ούτε νανοτεχνολογία...». Όμως οι ίδιοι οι μαθηματικοί που ασχολούνται με την έρευνα, δεν αναμένεται να αλλάξουν σε τίποτα τις συνήθειές τους ή να επηρεαστούν στο έργο τους. Το πολύ πολύ μερικοί ακόμα μαικήνες, ζηλεύοντας το κλέος του Clay να κάνουν μερικές, πάντα ευπρόσδεκτες, δωρεές στη μαθηματική έρευνα.

Πολύ πιο σοβαρό, αλλά λιγότερο «εφετζίδικο», είναι το εγχείρημα της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης (IMU): Προς το τέλος της δεκαετίας του 90, οι μαθηματικοί αναρωτήθηκαν ποιος θα μπορούσε να αναλάβει να κάνει μια παρουσίαση αντίστοιχη με εκείνη του Hilbert για τον νέο αιώνα. Διαπιστώθηκε, πράγμα που οι περισσότεροι το γνώριζαν ήδη, ότι τέτοιος μαθηματικός δεν υπήρχε! Η διεύρυνση της μαθηματικής θεματολογίας καθώς και η εξειδίκευση είχαν σαν συνέπεια, να μην υπάρχει σήμερα μαθηματικός με επαρκή γνώση ολόκληρου του φάσματος της μαθηματικής έρευνας. Ίσως ο Henri Poincaré και ο Hilbert να ήταν οι τελευταίοι «Μαθηματικοί». Τώρα πια έχουμε, στην καλύτερη περίπτωση, «Αναλύστες», «Αριθμοθεωρητικούς», «Αλγεβριστές», ή, ακόμα χειρότερα, ειδικούς στις πεπερασμένες ομάδες, στην Κ-θεωρία, στη μη μεταθετική γεωμετρία...

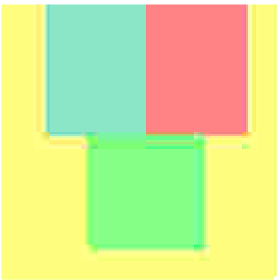
Έτσι λοιπόν, η IMU ανέθεσε σε μια τετραμελή επιτροπή, με επικεφαλής το ρώσσο μαθηματικό V.I. Arnold, να συγκεντρώσει τις απόψεις των κορυφαίων μαθηματικών του πλανήτη μας πάνω στο θέμα. Αυτοί με τη σειρά τους απευθύνθηκαν σε 31 συναδέλφους τους, κορυφαίους ερευνητές, ακαδημαϊκούς, κατόχους του Fields Medal (το αντίστοιχο του Nobel για τα μαθηματικά), ζητώντας τους να περιγράψουν τις προοπτικές της επιστήμης τους για τον 21ο αιώνα. Οι απαντήσεις τους, που σύμφωνα με την ομολογία των συντονιστών της έκδοσης δεν καλύπτουν καν ολόκληρο το φάσμα των μαθηματικών, συγκεντρώθηκαν σ' ένα τόμο 450 σελίδων (η ομιλία του Hilbert κατελάμβανε 57) και εκδόθηκε από την Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία.

Τόσο τα επτά προβλήματα του Clay Institute όσο και τα υπόλοιπα, που περιέχονται στον πιο πάνω τόμο, είναι προβλήματα μόνο για ειδικούς. Ελάχιστοι μαθηματικοί είναι σε θέση να καταλάβουν έστω και μόνο τη διατύπωση του συνόλου αυτών των προβλημάτων. Πόσο μάλλον το ευρύ κοινό. Υπάρχουν όμως και προβλήματα, που τουλάχιστον η διατύπωσή τους είναι κατανοητή ακόμα και στον απόφοιτο της Τρίτης Γυμνασίου. Θα κλείσουμε αυτή την παρουσίαση απαριθμώντας μερικά από αυτά. Με μια προειδοποίηση. Όσο πιο εύκολη και απλή είναι η διατύπωσή τους, τόσο πιο δύσκολη, σύνθετη και εξειδικευμένη είναι η λύση τους!

Ίσως το διασημότερο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών είναι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή το πρόβλημα της κατασκευής, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα δοσμένο κύκλο. Παρόλο που το πρόβλημα του τετραγωνισμού - χωρίς διευκρίνηση της μεθόδου - υπάρχει ήδη σε Αιγυπτιακούς παπύρους του

17ου π.Χ. αιώνα, στη σημερινή του μορφή, με σαφείς περιορισμούς πρέπει να διατυπώθηκε γύρω στον 5ο π.Χ. αιώνα, στην Αρχαία Ελλάδα. Η τελική, αρνητική λύση δόθηκε το 1882 μ.Χ. όταν με το θεώρημα Hermite – Lindemann αποδείχθηκε ότι δεν είναι δυνατός ο τετραγωνισμός του κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Μ' ένα διάστημα 2300 ετών από την πρώτη του σαφή διατύπωση μέχρι την τελική του λύση, ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδιαμφισβήτητα το μακροβιότερο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών. Από κοντά και τα δύο άλλα διάσημα προβλήματα της αρχαιότητας, ο χωρισμός με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη μιας τυχαίας γωνίας σε τρία ίσα μέρη (η τριχοτόμηση της γωνίας) και η κατασκευή ενός κύβου που να έχει όγκο διπλάσιο από ένα δοσμένο κύβο (το «Δήλειο Πρόβλημα» του διπλασιασμού του κύβου, πάντα με κανόνα και διαβήτη).

Ας έρθουμε τώρα σε πιο σύγχρονα προβλήματα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που χρειάζονται για να χρωματίσουμε ένα επίπεδο χάρτη, έτσι ώστε δυο γειτονικές χώρες να μην έχουν το ίδιο χρώμα; Είναι αρκετά φανερό από το διπλανό σχήμα, ότι τρία χρώματα δεν επαρκούν. Ήδη από το 1850 είχε, σχετικά εύκολα, αποδειχθεί, ότι πέντε χρώματα αρκούν για οποιονδήποτε χάρτη. Δεν είχε όμως βρεθεί κανένα παράδειγμα στο οποίο να είναι απαραίτητα τα πέντε χρώματα. Έτσι διατυπώθηκε η εικασία, που έγινε γνωστή ως *το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων*, ότι τέσσερα χρώματα επαρκούν. Χρειάστηκαν 126 χρόνια, μέχρι να αποδειχθεί τελικά ότι η εικασία αυτή είναι αληθινή. Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων είναι μάλιστα το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών που λύθηκε με ουσιαστική βοήθεια από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Μια αναφορά σε διάσημα προβλήματα με απλή διατύπωση, δε θα ήταν ποτέ πλήρης αν δεν περιελάμβανε και το «Τελευταίο Θεώρημα του Fermat»: Η εξίσωση $x^2+y^2=z^2$ έχει όσες ακέραιες λύσεις θέλουμε. ($x=3$, $y=4$, $z=5$ ή ακόμα $x=5$, $y=12$, $z=13$). Αυτό ήταν άλλωστε γνωστό και στους Βαβυλώνιους ήδη από τη 2η χιλιετία π.Χ. Ο γάλλος «ερασιτέχνης» μαθηματικός Pierre Fermat γύρω στο 1637, (τον καιρό δηλαδή του Ντ' Αρτανιάν), διαβάζοντας τη λατινική μετάφραση των «Αριθμητικών» του Διόφαντου, σημείωσε στο περιθώριο ότι για καμιά άλλη δύναμη, αυτή η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις. (Δηλαδή η εξίσωση $x^\nu+y^\nu=z^\nu$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για κανένα ν μεγαλύτερο του 2). Το πρόβλημα του Fermat είναι πιθανότατα το πρώτο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών που «επικηρύχθηκε». Το 1908, ανακοινώθηκε ότι ο Paul Wolfskehl, ένας μάλλον άσημος αλλά αρκετά πλούσιος μαθηματικός, είχε κληροδοτήσει το ποσό των 100.000 μάρκων για να προσφερθεί από το Πανεπιστήμιο του Göttingen σε όποιον αποδείξει το θεώρημα του Fermat. Χρειάστηκε να περάσουν ακόμη 87 χρόνια, δηλαδή συνολικά περισσότερα από 350 χρόνια μέχρι το 1995, όταν ο Andrew Wiles έδωσε την τελική απόδειξη.

Ας δούμε τέλος μερικά προβλήματα που παραμένουν ακόμα ανοικτά:

1. Η εικασία του Goldbach: Σε μια επιστολή του προς τον Eüler το 1742, ο ρώσσος μαθηματικός Christian Goldbach διατύπωνε την εικασία ότι κάθε άρτιος (ζυγός) ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων. Η εικασία του Goldbach, εκτός από ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα με απλή διατύπωση είναι χωρίς αμφιβολία και το αγαπημένο παιδί των λογοτεχνών. Εμφανίζεται σε τρία τουλάχιστον μυθιστορήματα, σ' ένα από αυτά μάλιστα στον τίτλο.

2. Το πρόβλημα των *τέλειων* αριθμών. Ένας αριθμός ονομάζεται τέλειος αν είναι ίσος με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του. Για παράδειγμα το 6 και το 28: 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14. Όλοι οι τέλειοι αριθμοί που είναι γνωστοί σήμερα είναι άρτιοι. Είναι ανοικτό πρόβλημα αν υπάρχουν περιττοί (μονοί) τέλειοι αριθμοί. Ακόμη, είναι ανοικτό το αν υπάρχουν άπειροι τέλειοι αριθμοί. Με δεδομένο ότι τα προβλήματα των τέλειων αριθμών αποδίδονται στους Πυθαγορείους, είναι τα παλαιότερα ανοικτά ακόμα προβλήματα στα Μαθηματικά. Πάλι στους Πυθαγόρειους οφείλονται και οι *φίλοι* αριθμοί. Δυο αριθμοί λέγονται φίλοι αν ο καθένας ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. για παράδειγμα το 220 και το 284. 284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 (όλοι οι διαιρέτες του 220)

   220=1+2+4+71+142 (όλοι οι διαιρέτες του 284).

   Δε γνωρίζουμε σήμερα αν τα ζευγάρια των φίλων αριθμών είναι άπειρα ή πεπερασμένα.

3. Προβλήματα με πρώτους αριθμούς (θυμίζουμε ότι πρώτος είναι ένας αριθμός που δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα – το 2, το 3, το 5 είναι πρώτοι ενώ το 4, το 6, το 9, το 15 δεν είναι). Για παράδειγμα:

   - υπάρχουν άπειρα ζευγάρια διδύμων πρώτων; (δηλαδή ζευγάρια πρώτων αριθμών που να διαφέρουν κατά δύο μονάδες, όπως το 3 και το 5, το 5 και το 7, το 17 και το 19)

   - υπάρχουν άπειροι πρώτοι ρ τέτοιοι ώστε να είναι πρώτος και ο 2ρ+1 (όπως για παράδειγμα το 2, το 3, το 5)

   - Υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός ανάμεσα στα τετράγωνα δυο διαδοχικών ακεραίων;

ΤΑ ΝΕΑ, 1 Δεκεμβρίου 2001